

Corrigé du DM n°10 - Électromagnétisme

1 De la physique autour d'un tore - Extrait Mines Ponts MP 2014

I. Étude d'un conducteur ohmique torique

6. ε_0 est la permittivité du vide. Son unité est le farad par mètre : $\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$.
7. À partir de l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ et de la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, on peut transformer l'équation de conservation de la charge :

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{en} \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0}$$

où la constante de temps τ vaut :

$$\boxed{\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \approx 10^{-19} \text{ s}}$$

On en déduit la solution :

$$\boxed{\rho(M, t) = \rho(M, 0) e^{-t/\tau}}$$

qui est quasiment négligeable au bout d'une durée $T \approx 5\tau$, c'est à dire **quasiment instantanément**.

8. L'ARQS revient à faire $c \rightarrow +\infty$ dans les équations de Maxwell, ce qui simplifie l'équation de Maxwell-Ampère en :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{puisque} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \vec{0}$$

9. On a donc maintenant pour système d'équations vérifiées en régime permanent dans un conducteur ohmique :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} ; \quad \rho = 0 ; \quad \text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$

La dernière équation entraîne qu'il existe un potentiel électrique V tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$. L'équation de Maxwell-Gauss implique alors que :

$$\text{div } (\overrightarrow{\text{grad}} V) = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \boxed{\Delta V = 0}$$

10. On a maintenant $\frac{d^2 V}{d\theta^2} = 0$ avec $V(0) = U$ et $V(\alpha) = 0$. V est donc une fonction affine de θ :

$$\boxed{V(\theta) = -\frac{U}{\alpha} \theta + U \quad \text{donc} \quad \vec{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{u}_\theta = \frac{U}{\alpha r} \hat{u}_\theta \quad \text{d'où} \quad \vec{j} = \frac{\gamma U}{\alpha r} \hat{u}_\theta}$$

11. L'intensité demandée est le flux du vecteur \vec{j} à travers la section du tore : $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = dr dz \hat{u}_\theta$. Il vient donc l'expression :

$$I = \frac{\gamma U}{\alpha} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^c dz \quad \text{d'où} \quad I = \frac{\gamma c}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right) U$$

qu'on écrit $I = U/R$ avec :

$$\boxed{R = \frac{\alpha}{\gamma c} \frac{1}{\ln(b/a)}}$$

12. La relation demandée est donc $R = \frac{L}{\gamma S}$. Ici, on peut remarquer que :

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) \approx \frac{b-a}{a}$$

si $(b-a) \ll a$. On a donc la valeur approchée :

$$R \approx \frac{\alpha a}{\gamma c(b-a)}$$

où on reconnaît $S = c(b-a)$ (section) et $L = \alpha a$ (longueur). On a donc bien $R \approx L/\gamma S$.

III. — Étude d'une pince ampèremétrique

13. – L'approximation des états quasi-stationnaires (AEQS) a été présentée à la question 8 : elle consiste

à négliger le courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant le courant de conduction \vec{j} , donc à calculer le champ magnétique par les équations $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et $\text{div} \vec{B} = 0$, exactement comme dans le cas magnétostatique. Le théorème de Stokes $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{(S)} \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ pour un contour fermé (C) servant de bord orienté à la surface (S) permet alors d'énoncer le théorème d'Ampère, la circulation de \vec{B} sur un tel contour fermé vérifie $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i_{(S)}$ où le courant enlacé $i_{(S)}$ est celui qui traverse la surface (S) .

14. – Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie matérielle des courants $i(t)$ et $i_1(t)$ donc le champ \vec{B} créé par ces courants est perpendiculaire à ces plans de symétrie : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \hat{u}_\theta$. Ce champ est également invariant par toute rotation d'un angle multiple de $2\pi/N$; si N est assez grand, il s'agit pratiquement d'une invariance de révolution donc $\vec{B}(M) = B(r, z) \hat{u}_\theta$. On applique alors le théorème d'Ampère à un cercle (C) de rayon r et d'axe (Oz) , donc à r et z fixés, et entièrement situé à l'intérieur du tore ; on a alors $d\vec{r} = r d\theta \hat{u}_\theta$ donc $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi r B(r, z)$. Le courant traversant un disque de rayon r comporte (dans le sens positif) le courant i au centre en N courants tous égaux à i_1 (puisque le cercle (C) est intérieur au tore, le disque est traversé une seule fois par chacun des fils formant un rectangle) soit $i_{(S)} = i + N i_1$ et $\vec{B}(M) = B(r) \hat{u}_\theta$ où $B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} (i + N i_1)$.

15. – Considérant que le bobinage de la pince ampèremétrique est formé de N rectangles de côtés $b-a$ et c , il vient $\Phi = N \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = dr dz \hat{u}_\theta$ donc $\Phi = \frac{\mu_0 N}{2\pi} (i + N i_1) \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^c dz$ ou enfin

$$\Phi = \frac{\mu_0 N c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} (i + N i_1).$$

Puisque $\Phi = L i_1 + M i$ pour i et i_1 quelconque, on peut identifier les

$$\text{deux termes } L = \frac{\mu_0 N^2 c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \text{ et } M = \frac{\mu_0 N c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} = \frac{L}{N}.$$

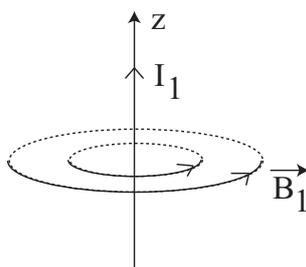
2 Phénomènes d'induction électromagnétique

I Flux du vecteur champ magnétique

1. L'analyse des symétries et des invariances, puis l'application du théorème d'Ampère sur un cercle centré sur le fil, perpendiculaire à celui-ci, et de rayon r permet de montrer que, pour $r > 0$:

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

2. Les lignes de champ magnétique sont des cercles concentriques centrés sur le fil, perpendiculaire à celui-ci, et s'enroulant autour du fil dans le sens trigonométrique.



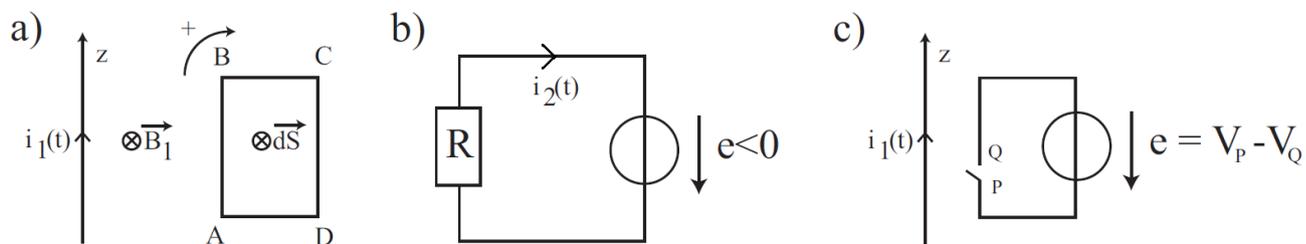
3. Le flux du champ magnétique créé par le fil à travers le cadre rectangulaire orienté dans le sens ABCD vaut :

$$\phi_1 = \iint_{ABCD} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{ABCD} B_1 \vec{u}_\theta \cdot dz dr \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 i_1 L}{2\pi} \int_d^{d+\ell} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i_1 L}{2\pi} \ln \left(\frac{d+\ell}{d} \right)$$

Le flux est donc positif avec cette orientation du circuit.

II Force électromotrice et courants induits

1. La f.e.m. est nulle car $\Phi_1 = cste$ et donc $e = -\frac{d\Phi_1}{dt} = 0$.
2. Ce deuxième cas correspond au cas de Neumann.
 - (a) L'orientation du circuit selon ABCD impose le sens de la flèche du courant i_2 , de e et de $d\vec{S}_{orienté}$, comme le montrent les schéma a) et b) ci-dessous.



Calculons tout d'abord la f.e.m. induite dans le circuit en utilisant la loi de Faraday (avec cette orientation, le calcul du flux est bien dans le bon sens par rapport au I , avec $d\vec{S}_{orienté}$ selon \vec{u}_θ) :

$$e = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{\mu_0 a L}{2\pi} \ln \left(\frac{d+\ell}{d} \right)$$

L'application de la loi d'Ohm dans le circuit équivalent de la figure b) constitué du générateur idéal de tension et d'une résistance R nous donne : $e = Ri_2$, et on obtient finalement :

$$i_2 = -\frac{\mu_0 a L}{2\pi R} \ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)$$

Le courant est négatif. Essayons de retrouver cette propriété avec la loi de Lenz, sachant que le courant induit doit générer un champ magnétique induit qui doit s'opposer à la variation du flux à travers le circuit. Comme i_1 augmente au cours du temps ($a > 0$), ϕ_1 augmente, et donc \vec{B}_{induit} selon $-\vec{u}_\theta$ (on rappelle que \vec{B}_{induit} ne s'oppose pas toujours à \vec{B} , par exemple dans le cas où le courant i_1 diminuerait, \vec{B}_{induit} et \vec{B} seraient dans le même sens). On retrouve bien que cela est cohérent avec un courant $i_2 < 0$ selon ABCD (ou un courant positif dans le sens DCBA).

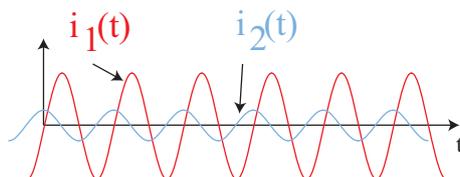
- (b) Lorsque l'interrupteur est ouvert, aucun courant ne circule dans le circuit ; cependant, la présence du champ magnétique variable donne toujours lieu à un champ électromoteur identique dont la circulation n'a pas changé par rapport au cas précédent varié puisqu'on néglige la taille de l'interrupteur. Il existe donc une différence de potentiel entre les points P et Q identique à la f.e.m. calculée précédemment. En utilisant l'orientation précédemment choisie pour la f.e.m. (Fig.2c), on obtient directement :

$$V_P - V_Q = e = -\frac{\mu_0 a L}{2\pi} \ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right) < 0$$

3. (a) De la même façon que précédemment, on obtient avec la flèche du courant i_2 orientée dans le sens horaire :

$$i_2 = -\frac{\mu_0 I_m L \omega_1 \cos(\omega_1 t)}{2\pi R} \ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)$$

- (b) Les courbes $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont en quadrature de phase, avec i_2 d'amplitude nécessairement plus faible que i_1 (attention, c'est l'opposé de i_2 qui est représenté ici...



4. Ce dernier cas correspond au cas de Lorentz.

- (a) La fem d'induction est nulle dans ce cas d'après la loi de Faraday, car le flux du champ magnétique est inchangé à tout instant.

On peut également s'en convaincre en se plaçant dans le référentiel du cadre mobile : le champ \vec{B}_1 étant invariant par rotation d'angle θ autour de l'axe z , le champ perçu par le circuit est invariant.

- (b) Calculons la f.e.m. induite dans le circuit en utilisant la loi de Faraday, le circuit étant toujours orienté dans le sens horaire ABCD :

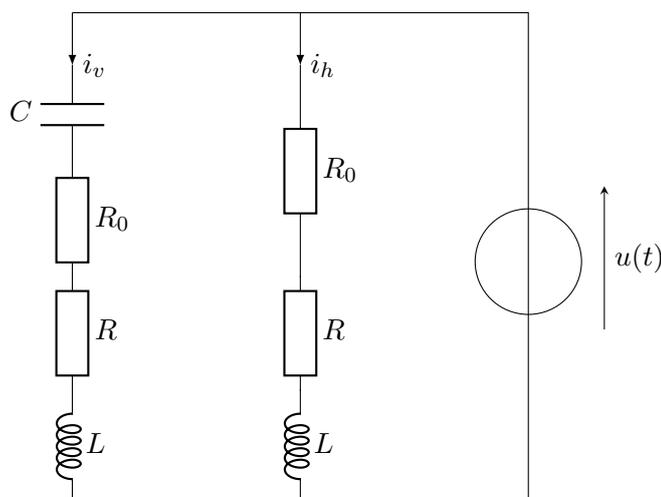
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 i_1 L}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_{d_0+vt}^{d_0+\ell+vt} \frac{dr}{r} \right] = \frac{\mu_0 i_1 v L}{2\pi} \frac{\ell}{(d_0+vt)(d_0+\ell+vt)}$$

On trouve que la f.e.m. est positive lorsqu'elle est orientée dans le sens de ABCD, et le courant induit est également dirigé dans le sens horaire, contrairement aux cas étudiés précédemment. En effet, dans le II.2, le flux augmentait alors qu'il diminuait ici au cours de l'éloignement du circuit.

3 Principe du moteur asynchrone

I. Génération d'un champ magnétique tournant

1. Dessiner le schéma électrocinétique correspondant à ce circuit en y faisant figurer L et R .



2. Déterminer :

- a) La valeur de R_0 pour que le courant $i_h(t)$ soit en retard de $\pi/4$ sur la tension $u(t)$.

On doit donc avoir $\varphi_h - \varphi_u = -\pi/4$. On utilise la représentation complexe pour résoudre cette question :

$$\underline{i}_h(t) = \frac{\underline{u}(t)}{R + R_0 + jL\omega_0} \quad \text{d'où} \quad \varphi_h - \varphi_u = -\arctan\left(\frac{L\omega_0}{R + R_0}\right) = -\pi/4$$

donc :

$$L\omega_0 = R + R_0 \iff \boxed{R_0 = L\omega_0 - R}$$

- b) La valeur de C pour que le courant $i_v(t)$ soit en avance de $\pi/4$ sur la tension $u(t)$.

On a maintenant $\varphi_v - \varphi_u = +\pi/4$. En notation complexe on obtient :

$$\underline{i}_v(t) = \frac{\underline{u}(t)}{R + R_0 + jL\omega_0 + \frac{1}{jC\omega_0}} \quad \text{d'où} \quad \varphi_v - \varphi_u = -\arctan\left(\frac{L\omega_0 - 1/C\omega_0}{R + R_0}\right) = \pi/4$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{C\omega_0} - L\omega_0 = R + R_0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{C = \frac{1}{(L\omega_0 + R + R_0)\omega_0} = \frac{1}{2L\omega_0^2}}$$

- c) Application numérique : $L = 200 \text{ mH}$, $R = 0,5 \Omega$ et $f_0 = \omega_0/2\pi = 100 \text{ Hz}$. Calculer R_0 et C .

$$R_0 = 125 \, \Omega \text{ et } C = 6,3 \, \mu\text{F}$$

Ce sont des valeurs tout à fait courantes en TP.

- d) Montrer que les amplitudes I_h et I_v sont identiques lorsque les conditions précédentes sont remplies.

On a :

$$I_h = |i_h(t)| = \frac{U}{\sqrt{(R + R_0)^2 + (L\omega_0)^2}} = \frac{U}{\sqrt{2(R + R_0)^2}}$$

et

$$I_v = |i_v(t)| = \frac{U}{\sqrt{(R + R_0)^2 + \left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{2(R + R_0)^2}}$$

Les amplitudes des deux courants sont bien identiques.

3. Montrer que le champ magnétique total $\vec{B}(A, t)$ créé au point A par l'ensemble des deux bobines est un champ tournant dont on précisera le sens de rotation.

Les phases des deux courants électriques sont respectivement $\varphi_h = \varphi_u - \pi/4 = -\pi/2$ et $\varphi_v = \varphi_u + \pi/4 = 0$ puisque $\varphi_u = -\pi/4$. En notant $I_0 = I_h = I_v$ la valeur commune de l'amplitude des courants, on a donc :

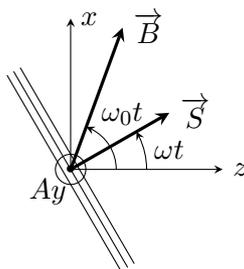
$$i_h(t) = I_0 \cos(\omega_0 t - \pi/2) = I_0 \sin(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad i_v(t) = I_0 \cos(\omega_0 t)$$

ce qui produit, par le théorème de superposition, un champ magnétique :

$$\begin{aligned} \vec{B}(A, t) &= \alpha \frac{\mu_0 N I_0}{\ell_b} \cos(\omega_0 t) \vec{e}_z + \alpha \frac{\mu_0 N I_0}{\ell_b} \sin(\omega_0 t) \vec{e}_x \\ &= B_0 [\cos(\omega_0 t) \vec{e}_z + \sin(\omega_0 t) \vec{e}_x] \end{aligned}$$

Il s'agit d'un champ magnétique tournant dans le **sens trigonométrique**.

II. Principe du moteur asynchrone



4. Déterminer la force électromotrice induite dans (E) par le champ magnétique tournant. En déduire que (E) est parcouru par un courant induit $i(t)$ vérifiant l'équation différentielle :

$$L_s \frac{di}{dt} + R_s i = \Phi_0 \Omega \sin(\Omega t)$$

où $\Omega = \omega_0 - \omega$. On donnera l'expression de la constante Φ_0 en fonction de N , S et B_0 .

Comme \vec{B} est uniforme à l'échelle de la surface des spires, son flux à travers S est (tenir compte des N spires) :

$$\Phi(\vec{B}/S) = N \vec{B} \cdot \vec{S} = N B_0 S \cos[(\omega_0 - \omega)t]$$

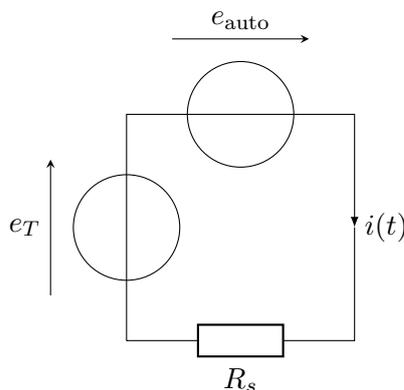
D'après la loi de Faraday, la fém induite par ce champ magnétique tournant est :

$$e_T = -\frac{d\Phi(\vec{B}/S)}{dt} = NB_0S(\omega_0 - \omega) \sin[(\omega_0 - \omega)t]$$

De plus, comme on tient compte de l'inductance L_s de l'enroulement, il y a une **fém autoinduite** qui s'écrit :

$$e_{\text{auto}} = -L_s \frac{di}{dt}$$

Ainsi, le schéma électrocinétique équivalent à l'enroulement est :



d'où :

$$e_T + e_{\text{auto}} = R_s i \quad \text{c'est à dire} \quad L_s \frac{di}{dt} + R_s i = \Phi_0 \Omega \sin(\Omega t) \quad \text{avec} \quad \Phi_0 = NB_0S$$

5. On se place en régime sinusoïdal forcé. L'intensité du courant dans (E) est alors sinusoïdale de pulsation Ω et de la forme :

$$i(t) = \lambda \cos(\Omega t) + \mu \sin(\Omega t)$$

où λ et μ sont deux constantes.

Déterminer les expressions de λ et μ en fonction de Φ_0 , Ω , L_s et R_s .

On substitue l'expression de $i(t)$ dans l'équation différentielle de la question précédente et on regroupe les termes en $\cos(\Omega t)$ et $\sin(\Omega t)$. On obtient :

$$(L_s \Omega \mu + R_s \lambda) \cos(\Omega t) + (R_s \mu - L_s \Omega \lambda) \sin(\Omega t) = \Phi_0 \Omega \sin(\Omega t)$$

Cette équation devant être valable pour tout t , on peut particulariser en prenant $\Omega t = 0$ et $\Omega t = \pi/2$. On obtient alors le système de deux équations :

$$\begin{cases} L_s \Omega \mu + R_s \lambda = 0 \\ R_s \mu - L_s \Omega \lambda = \Phi_0 \Omega \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\Phi_0 \Omega \frac{L_s \Omega}{R_s^2 + (L_s \Omega)^2} \\ \mu = \Phi_0 \Omega \frac{R_s}{R_s^2 + (L_s \Omega)^2} \end{cases}$$

6. Donner l'expression du moment magnétique \vec{m} de l'enroulement (E). En déduire le moment des forces de Laplace $\vec{\Gamma}(t)$ exercé par le champ magnétique tournant.

On sait que : $\vec{m} = N i(t) \vec{S}$ et donc, puisque \vec{B} est uniforme :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(t) &= \vec{m} \wedge \vec{B} = NB_0 S i(t) \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ 0 \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \sin(\omega_0 t) \\ 0 \\ \cos(\omega_0 t) \end{bmatrix} \\ &= \Phi_0 i(t) [\sin(\omega_0 t) \cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t) \sin(\omega t)] \vec{e}_y \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{\Gamma}(t) = \Phi_0 i(t) \sin[(\omega_0 - \omega)t] \vec{e}_y = \Phi_0 i(t) \sin(\Omega t) \vec{e}_y$$

7. En réalité le dispositif possède une grande inertie mécanique et la grandeur significative à considérer est la valeur moyenne $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ de $\vec{\Gamma}(t)$. Montrer que :

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = \Gamma \vec{e}_y \quad \text{avec} \quad \Gamma = \frac{\Omega R_s \Phi_0^2}{2(R_s^2 + L_s^2 \Omega^2)}$$

En remplaçant l'intensité $i(t)$ par son expression obtenue à la question 11., il vient :

$$\vec{\Gamma}(t) = \Phi_0 \lambda \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) \vec{e}_y + \Phi_0 \mu \sin^2(\Omega t) \vec{e}_y$$

En passant à la valeur moyenne, sachant que $\langle \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) \rangle = 0$ et $\langle \sin^2(\Omega t) \rangle = 1/2$, on obtient :

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = \frac{\Phi_0 \mu}{2} \vec{e}_y = \frac{\Omega R_s \Phi_0^2}{2(R_s^2 + L_s^2 \Omega^2)} \vec{e}_y$$

8. On donne ci-dessous l'allure du moment moyen Γ en fonction de la vitesse angulaire ω de (E).
Quelle est la plage de pulsations ω pour lesquelles ce moment est effectivement moteur ?

Le couple est moteur lorsque $\Gamma > 0$, c'est à dire si $0 < \omega < \omega_0$. Le champ magnétique tournant doit donc tourner plus vite que l'enroulement.

9. Le mécanisme pivot n'est pas parfait et il exerce un moment mécanique résistant constant $\vec{\Gamma}_r = -\Gamma_r \vec{e}_y$ ($\Gamma_r > 0$) en raison de frottements. On suppose que :

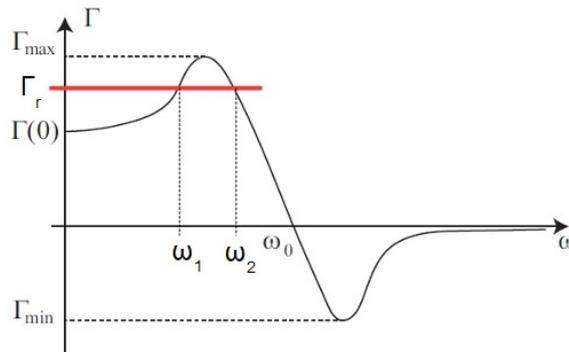
$$\Gamma(0) < \Gamma_r < \Gamma_{\max}$$

À l'aide du théorème du moment cinétique et en ne considérant que le moment moyen pour les forces de Laplace, établir l'équation qui découle de la constance de ω . Utiliser le graphe précédent pour montrer qu'il n'y a alors que deux valeurs possibles ω_1 et ω_2 de la vitesse angulaire de rotation.

En régime permanent, ω est constante et on a :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma - \Gamma_r = 0 \quad \text{d'où} \quad \Gamma = \Gamma_r$$

On trace donc la droite horizontale d'équation $y = \Gamma_r$. Elle vient couper la courbe $\Gamma = f(\omega)$ pour deux pulsations ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$



10. *Étudier la stabilité de chacun de ces deux régimes de fonctionnement.*

La rotation à ω_2 est stable et celle à ω_1 est instable. Montrons-le pour ω_2 .

- Si à partir d'une vitesse de rotation ω_2 , la vitesse angulaire ω augmente légèrement pour une raison ou une autre, alors le couple moteur Γ diminue, donc $\Gamma - \Gamma_r$ devient négatif, ce qui fait diminuer ω d'après le TMC. La rotation est donc ramenée à son point d'équilibre ω_2
- Inversement, si à partir de ω_2 la vitesse angulaire ω diminue légèrement pour une raison ou une autre, alors le couple moteur Γ augmente, donc $\Gamma - \Gamma_r$ devient positif, ce qui fait alors augmenter ω . La rotation est donc à nouveau ramenée à son point d'équilibre ω_2