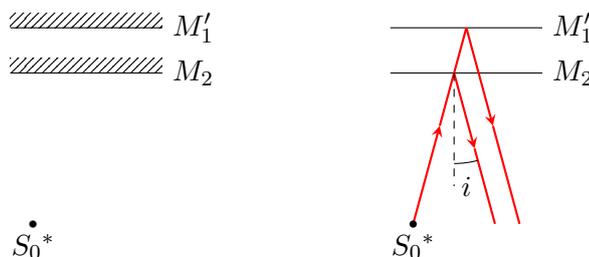


## Corrigé du DM n°16

## 1 Mesure de la longueur d'onde centrale d'une raie

1. On peut proposer le modèle des deux miroirs :



$M_1'$  est le symétrique de  $M_1$  par rapport à la lame séparatrice.  $S_0^*$  est le symétrique du point source  $S_0$  par rapport à la lame séparatrice  $L_s$ .

2. Cf. le cours et la figure ci-dessus. Les deux rayons qui convergent vers  $M$  dans le plan focal image de la lentille sortent de l'interféromètre en étant parallèles et ils proviennent d'un seul rayon lumineux émis par  $S_0$  (division d'amplitude). On peut utiliser le modèle des deux miroirs ou bien le modèle des deux sources.
3. Comme les deux ondes qui interfèrent sont issues d'un même point source et qu'elles sont monochromatiques de même longueur d'onde  $\lambda_0$ , on peut utiliser la formule de Fresnel. Si on appelle  $I_0$  l'intensité au niveau de la source  $S_0$ , les deux ondes émergent de l'interféromètre ont chacune une intensité  $I_0/4$ . Il vient donc :

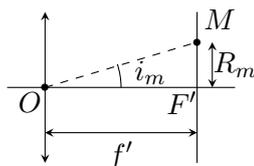
$$I = 2 \left( \frac{I_0}{4} \right) \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} 2d \cos i \right) \right]$$

L'intensité est constante pour  $i$  constant, ce qui donne des anneaux de centre  $F'$ . Ce sont des franges d'égale inclinaison.

4. L'ordre d'interférence est :

$$p(i) = \frac{2d}{\lambda_0} \cos i = p_0 \cos i$$

où  $p_0 = \frac{2d}{\lambda_0} = p_c + \varepsilon$  est l'ordre au centre, c'est à dire en  $i = 0$ . On voit que l'ordre d'interférence  $p(i)$  décroît lorsque  $i$  augmente. C'est pourquoi l'ordre du plus petit anneau brillant est  $p_c$ . En numérotant les anneaux brillants par rayons croissants, l'ordre de l'anneau brillant numéro  $m$  est alors  $p_c - m + 1$ .



Comme :

$$p(i) = \frac{2e}{\lambda_0} \cos i \approx p_0 \left( 1 - \frac{i^2}{2} \right)$$

le centre de l'anneau brillant numéro  $m$  correspond à  $i_m$  tel que  $\tan(i_m) \approx i_m = \frac{R_m}{f'}$  et  $p(i_m) = p_c - m + 1$ . Il vient donc :

$$p_c - m + 1 = p_0 - p_0 \frac{i_m^2}{2} = p_0 - p_0 \frac{R_m^2}{2f'^2}$$

d'où :

$$\frac{R_m^2}{2f'^2} = \frac{1}{p_0} (p_0 - p_c + m - 1) = \frac{\lambda_0}{2d} (m + \varepsilon - 1)$$

et donc :

$$R_m = f' \sqrt{\frac{(m - 1 + \varepsilon)\lambda_0}{d}}$$

5. Les mesures sont données dans le tableau ci-dessous :

num.anneau	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R_m$ (cm)	2,9	4,6	5,85	6,9	7,75	8,6	9,3	10,0	10,7	11,3

6. On peut faire une régression linéaire sur les couples  $(m, R_m^2)$ , ce qui correspond à une fonction affine de coefficient directeur  $\frac{f'^2 \lambda_0}{d}$ . On trouve alors un coefficient de corrélation :  $r = 0,99987$  ce qui confirme l'hypothèse d'une fonction affine  $y = ax + b$ . Le coefficient directeur est alors :  $a = 1,328 \cdot 10^{-3}$ , ce qui conduit à :

$$\lambda_0 = 580 \text{ nm}$$

ce qui correspond à du jaune.

7. On peut raisonner avec un anneau (brillant ou sombre) d'ordre d'interférence  $p$  fixé. Comme  $p = \frac{2d}{\lambda_0} \cos i$ , si  $d$  augmente, alors  $\cos i$  doit diminuer pour que  $p$  reste constant. On en déduit que  $i$  doit augmenter et donc le rayon de l'anneau  $R = f'i$  aussi. Ainsi, les rayons des anneaux augmentent.

Le contraste diminue en raison de la longueur de cohérence  $\ell_c$  de la lumière utilisée. Le contraste reste bon tant que  $|\delta| \leq \ell_c/2$ . Si  $\delta$  devient de l'ordre de  $\ell_c$  voire supérieur, le phénomène d'interférence se brouille.

## 2 Interféromètre de Michelson - (d'après Banque-PT-2005)

### I. Généralités sur les interféromètres

- Exemples de dispositif à division du front d'onde : trous d'Young, miroir de Lloyd...  
Exemple de dispositif à division d'amplitude : interféromètre de Michelson en lame d'air, lorsqu'on observe les anneaux dans le plan focal image d'une lentille.
- La longueur de cohérence est  $\ell_c = c\tau_c$  où  $\tau_c$  est le temps de cohérence.  $\tau_c$  est le temps caractéristique de décroissance de la fonction d'autocorrélation  $g(\tau) = \langle a(t)a(t-\tau) \rangle$ . On peut dire qu'au bout de quelques  $\tau_c$ ,  $g(\tau) \approx 0$ .

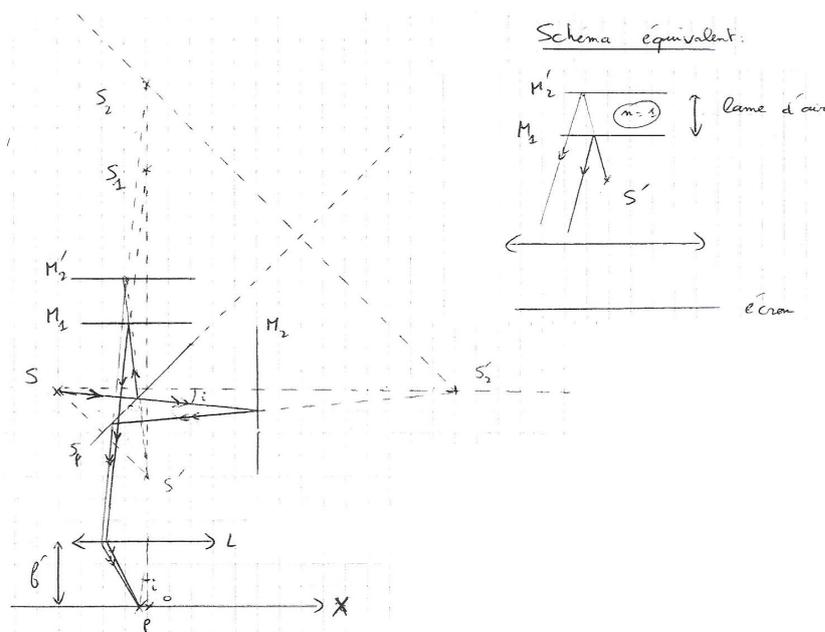
Dans un modèle de trains d'onde (morceaux de sinusoïde),  $\tau_c$  correspond à la durée de chaque train d'onde.

On observe des interférences à condition que la différence de marche séparant deux rayons qui interfèrent ne soit pas grande devant la longueur de cohérence. Il faut rester dans les zones de cohérence  $|\delta| \ll \ell_c$  ou de cohérence partielle  $|\delta| \approx \ell_c$ .

- On peut interposer entre la source et le dispositif un filtre interférentiel (coloré) correspondant à la raie souhaitée

## II. Interféromètre de Michelson utilisé en lame d'air

- L'interféromètre est réglé au contact optique (les chemins optiques parcourus dans les deux bras sont identiques) : la différence de marche est nulle en tout point de l'écran, les interférences sont constructives partout. On observe donc un éclairement uniforme appelé "teinte plate".
- Les rayons émergents issus d'un même rayon incident sont parallèles entre eux.



Ils convergent au point  $P$  du plan focal image de la lentille, de position  $X = f' \tan i \simeq f' i$ .

- Les rayons qui interfèrent en  $P$  ont une différence de marche  $\delta = 2e \cos i$  (cf cours,  $n_{air} = 1$  ici).  
L'intensité lumineuse ou éclairement s'écrit alors :

$$\begin{aligned} I(P) &= 2 I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right) \\ &= 2 I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi e \cos i}{\lambda} \right) \right) \end{aligned}$$

L'ordre d'interférence au point  $P$  est  $p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2n_{air}e \cos i}{\lambda_0}$  :

$$p = \frac{2e \cos i}{\lambda}$$

Cet ordre d'interférence est maximal pour  $i = 0$  donc au centre de la figure d'interférences.

- Les franges d'interférences sont localisées sur la surface constituée de l'intersection des rayons issus d'un même rayon incident : dans cette configuration, les interférences sont localisées à l'infini.
- Au centre du système d'anneaux :  $p_{\max} = \frac{2e}{\lambda} \simeq 4028,6$  : le centre est presque sombre ( $p_{\max}$  est quasiment demi-entier).  
*Note* : ce niveau de précision exigerait en fait de considérer  $n_{air} = 1,0003$ .

Le premier anneau brillant est obtenu pour  $p_1 = 4028$ .

De plus, pour de petits angles,  $p = \frac{2e}{\lambda} \cos i \simeq \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$  donc :

$$i = \sqrt{2 - \frac{p\lambda}{e}}$$

Le rayon de l'anneau correspondant à l'ordre  $p$  vaut alors :

$$r = f' \sqrt{2 - \frac{p\lambda}{e}}$$

$AN : r(p_1) \simeq 1,7 \text{ cm} ; r(p_2 = 4027) \simeq 2,8 \text{ cm} ; r(p_3 = 4026) \simeq 3,6 \text{ cm}$ .

L'écart entre les anneaux diminue à mesure que l'on s'éloigne du centre.

9. Cette lame augmente le chemin optique sur la voie 1 donc diminue la différence de marche entre les deux voies.

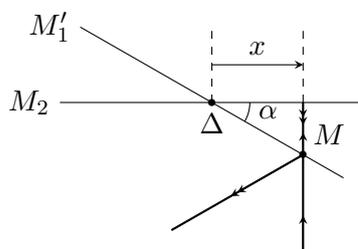
Au centre de la figure d'interférences :  $\delta = 2e \cos(0) - 2 \times (n-1)e' \Rightarrow p'_1 = 4010,8$ .

La variation de l'ordre d'interférence au centre est donc :

$$\Delta p = -\frac{2(n-1)e'}{\lambda_0} \simeq -17,8$$

### III. Interféromètre de Michelson utilisé en coin d'air

10. Voir figure ci-dessous. Les deux miroirs  $M_2$  et  $M'_1$  (miroir fictif) forment un coin d'air d'arête  $\Delta$ .



On place la source au foyer principal objet d'une lentille convergente.

11. Il faut conjuguer l'écran et les miroirs. La relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\overline{OA'} = \frac{f' \overline{OA}}{f' + \overline{OA}} \quad AN : \overline{OA'} = 1 \text{ m} \quad \overline{\gamma} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad AN : \overline{\gamma} = -4$$

12. La différence de marche est  $\delta = 2 \times x \tan \alpha \simeq 2\alpha x$ . On observe des franges rectilignes ( $x = C^{te}$ ).

$$I(i+x) = I(x) \Rightarrow \boxed{i = \frac{\lambda}{2\alpha}} \text{ donc } \boxed{i_{\text{ecran}} = 2 \frac{\lambda}{\alpha}} \quad AN : \underline{\alpha \simeq 2,91 \times 10^{-4} \text{ rad.}}$$

13. Sur l'arête du coin d'air,  $\delta = 0$  quelle que soit la longueur d'onde. L'image de l'arête du coin d'air correspond à des interférences constructives pour toutes les longueurs d'onde : on obtient une frange blanche.

Comme chaque longueur d'onde fournit son propre système de franges et que ces différents systèmes sont décalés les uns par rapport aux autres et sont incohérents entre eux, on obtient des franges irisées au voisinage de l'arête puis du blanc d'ordre supérieur.

Les interférences sont observables si  $-\delta_{\text{lim}} < \delta < \delta_{\text{lim}} \Rightarrow -\frac{\delta_{\text{lim}}}{2\alpha} < x < \frac{\delta_{\text{lim}}}{2\alpha}$ .

Plus  $\alpha$  augmente, plus la plage d'observation des interférences est réduite.

#### IV. Application 1 : détermination des longueurs d'onde d'un doublet

14. Les deux radiations de longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont incohérentes entre elles : leurs systèmes de franges se superposent en intensité. On a donc :

$$\begin{aligned} I &= 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \right) + 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right) \right) \\ &= 4I_0 \left( 1 + \cos \left( \pi\delta \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \cos \left( \pi\delta \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

soit

$$I = 4I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{moy}^2} \delta \right) \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_{moy}} \delta \right) \right)$$

où  $\lambda_{moy} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ .

Il apparaît un terme de visibilité  $V = \cos \left( \frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{moy}^2} \delta \right)$  ; le contraste est  $\mathcal{C} = |V|$ . Il peut s'annuler pour certaines valeurs de  $d$  car  $\delta = 2\alpha x + 2d$ .

15. Quand  $d = 0$ , les franges sont bien contrastées donc  $\mathcal{C} = 1$  et  $\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{moy}^2} \times 2\alpha x = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .  
Quand  $d = 0,15$  mm, le contraste est nul donc :

$$\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{moy}^2} \times 2(\alpha x + d) = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

On en déduit  $\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{moy}^2} = \frac{1}{4d}$  donc :

$$\lambda_2 = \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{4d} \right)^{-1} = \frac{\lambda_1 4d}{4d - \lambda_1}$$

AN :  $\lambda_2 \simeq 589,6$  nm et  $\Delta\lambda \simeq 0,6$  nm.

Remarque : On aurait pu retrouver l'expression précédente de  $\Delta\lambda$  sachant qu'on passe ici d'une coïncidence à une anti-coïncidence des anneaux correspondant à chacune des longueurs d'onde. Dans le cas de la coïncidence, on a :  $\Delta p = k$ , et dans le cas de l'anti-coïncidence :  $\Delta p = k + \frac{1}{2}$ , soit

$$2d \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda_{moy}^2}{4d}$$

#### IV. Application 2 : détermination de la largeur spectrale d'une raie

16. La longueur d'onde  $\lambda_0 = 643,8$  nm correspond à une raie rouge.
17. La mesure de  $L_c$  permet de déduire  $\Delta\nu = \frac{c}{L_c} = 10^9$  Hz = 1 GHz, qui correspond à  $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \Delta\nu}{c} = 1,38 \cdot 10^{-12}$  m = 0,0014 nm, ce qui est cohérent en comparaison avec l'écart du doublet du sodium obtenu précédemment, qui valait 0,6 nm.

La durée du train d'onde vaut donc  $\tau = \frac{1}{\Delta\nu} = 10^{-9}$  s = 1 ns. On obtient évidemment un temps de cohérence très court.

18. (a) Les radiations émises dans la raie du cadmium sont incohérentes entre elles puisqu'elles sont non synchrones, et il faut donc sommer les intensités élémentaires  $dI_\nu$  produites sur l'écran par chaque radiation de largeur  $d\nu \ll \Delta\nu$  centrée sur la fréquence  $\nu \in [\nu_0 - \Delta\nu/2; \nu_0 + \Delta\nu/2]$  :

$$I(\delta) = \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} dI_\nu$$

De plus, la raie est supposée avoir un profil rectangulaire de sorte qu'on peut définir une densité spectrale  $J_0$  constante au niveau de la source telle que  $dI_{0,\nu} = J_0 d\nu$ . Finalement, chaque radiation donnant lieu à une interférence à deux ondes cohérentes de même intensité avec l'interféromètre de Michelson, on peut également écrire :

$$dI_\nu = 2J_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right] d\nu$$

et donc

$$I(\delta) = \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} 2J_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right] d\nu$$

- (b)  $I(\delta) = 2J_0 \left[ \Delta\nu + \frac{c}{2\pi\delta} \left[ \sin\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right]_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} \right]$ . En utilisant la formule de trigonométrie, on obtient :

$$I(\delta) = 2J_0\Delta\nu \left[ 1 + \text{sin}_c\left(\frac{\pi\Delta\nu\delta}{c}\right) \cos(2\pi\nu_0\delta) \right]$$

où  $\text{sin}_c$  est la fonction sinus cardinal définie par :  $\text{sin}_c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ . C'est cette partie de l'intensité qui a une variation plus lente avec  $\delta$  et qui sert d'enveloppe car  $\Delta\nu \ll \nu_0$ . C'est donc la fonction de visibilité, et on peut en déduire :

$$\mathcal{C} = \left| \text{sin}_c\left(\frac{\pi\Delta\nu\delta}{c}\right) \right|$$

- (c) Le contraste s'annule pour la première fois lorsque l'argument du sinus cardinal est égal à  $\pi$ , soit pour  $\delta = \frac{c}{\Delta\nu} = L_c$ . On retrouve bien le résultat obtenu précédemment.

### 3 Extrait Mines-Ponts MP 2013

#### III Contrôle d'épaisseur de certaines pièces

##### III.A Contrôle d'épaisseur d'un dépôt métallique

19. Calculons d'abord la différence de marche au point  $I$  d'incidence d'un rayon incident avec la face supérieure (lame semi-réfléchissante) du système (figure 3 à gauche). Un des rayons est directement réfléchi tandis que l'autre doit effectuer en plus le trajet  $IJI$ . Si on néglige toute différence de phase lors des réflexions (ou si elles se compensent),  $\delta = (IJI) = 2IJ = 2x \tan \epsilon$ .

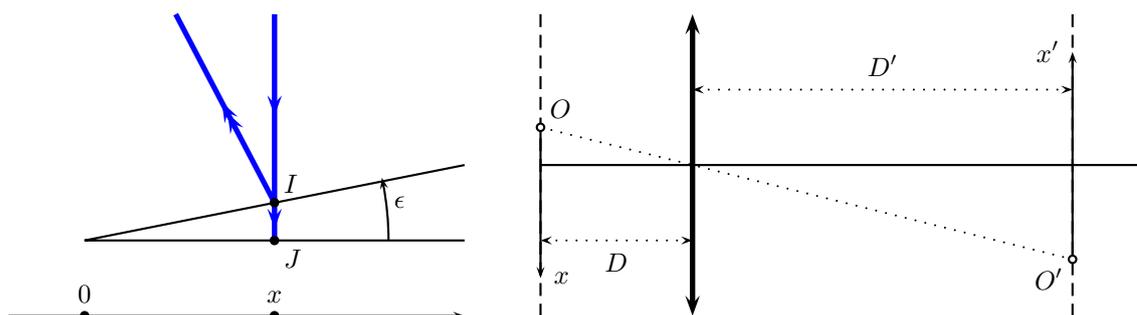


FIGURE 3 – Mesure interférentielle dans un coin d'air

L'observation sur l'écran (figure 3 à droite) se fait sans différence de marche supplémentaire mais avec conjugaison :  $x' = \gamma x$  (on a ici choisi  $\gamma > 0$ ) donc  $\delta = \frac{\tan \epsilon}{\gamma} x'$  ; la relation  $\delta = p\lambda_0$  définit la frange

d'ordre  $p$  ; l'interfrange est  $d_0 = x'_{p+1} - x'_p$  donc  $d_0 = \frac{\gamma \lambda_0}{\tan \epsilon}$ . Ici,  $\gamma = \frac{D'}{D}$  avec  $\frac{1}{D} + \frac{1}{D'} = \frac{1}{f'}$  (relation de conjugaison) donc  $\gamma = \frac{D'}{D} - 1 = 11,5$  ; de plus,  $\tan \epsilon = 1,75 \cdot 10^{-3}$  (on aurait pu écrire  $\epsilon = 1,75$  mrad) donc  $d_0 = 3,51$  mm

20. Dans la partie où est situé le dépôt métallique, l'aller-et-retour se fait sur une épaisseur diminuée de  $e$  donc la nouvelle différence de marche est  $\delta_D = \delta - 2e$  ; en dehors de celui-ci,  $\delta = \frac{2\epsilon}{\gamma} x'$  tandis que dans la zone « décalée »,  $\delta_D = \frac{2\epsilon}{\gamma} x'_D$ . Si on suit une frange donnée,  $\delta = \delta_D = p\lambda_0$  donc  $x'_D = x' + \frac{\gamma e}{\epsilon}$  ; il y a décalage de  $u = x'_D - x'$  soit  $u = \frac{\gamma e}{\epsilon}$  ou, numériquement,  $e = \frac{\epsilon u}{\gamma} = 89,5$  nm. On évalue un décalage d'une fraction d'interfrange donc une épaisseur d'une fraction de demi-longueur d'onde : c'est l'ordre de grandeur des meilleures mesures possibles par un dispositif interférométrique.
21. Dans un milieu d'indice  $n$ , la vitesse de la lumière est  $v_\varphi = c/n$  donc la longueur d'onde  $\lambda = v_\varphi/f$  (si  $f$  est la fréquence de l'onde lumineuse, indépendante du milieu de propagation) vérifie  $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ . Reprenant les

résultats ci-dessus en remplaçant  $\lambda_0$  par  $\lambda$ , on en déduit que  $d_0$  est diminué (dans un rapport  $n$ ) tandis que  $u$  est inchangé.

22. Reprenant de même les résultats précédents avec  $\epsilon \rightarrow \epsilon' > \epsilon$ , on en conclut que  $d_0$  et  $u$  diminuent dans la même proportion : la figure d'interférences subit une homothétie de rapport  $\epsilon/\epsilon'$ .