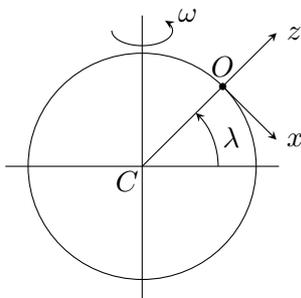


1 Déviation d'un objet lâché du haut de la tour Montparnasse

Le référentiel géocentrique est supposé galiléen. Le référentiel terrestre (\mathcal{R}_T) est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire ω . On considère un repère $(Oxyz)$ lié à (\mathcal{R}_T) tel que la latitude du point O soit $\lambda = 49^\circ$ (latitude de Paris).



Données :

- Rayon terrestre : $R_T = 6371$ km
- Masse de la Terre : $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg
- Constante de gravitation : $G = 6,67 \times 10^{-11}$ uSI

1. Estimer la valeur numérique de l'accélération de la pesanteur g au point O .

On lâche une bille de plomb sans vitesse initiale du haut de la tour Montparnasse (209 m), un jour sans vent.



2. Expliquer pourquoi la bille ne tombe pas exactement au pied de la tour.
3. On donne les équations du mouvement de la bille dans le référentiel terrestre :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= 2\omega \sin(\lambda) \dot{y} \\ \ddot{y} &= -2\omega \sin(\lambda) \dot{x} - 2\omega \cos(\lambda) \dot{z} \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega \cos(\lambda) \dot{y} \end{cases}$$

Expliquer d'où proviennent ces équations ainsi que les approximations qui ont été faites pour les établir. Résoudre ces équations à l'ordre 1 en ω et en déduire la déviation que subirait la bille par rapport à un fil à plomb suspendu en haut de la tour. On justifiera clairement les approximations faites.

4.  Discuter de la validité de la résolution précédente en complétant le fichier Python `DeviationEst-TourMontparnasse.py` de façon à faire une résolution complète du système d'équations. En déduire les déviations vers l'est et vers le sud.

2 Pendule aux grandes oscillations

On considère un pendule simple constitué d'une masse m accrochée en un point O fixe à un fil inextensible, sans masse, de longueur ℓ . On note θ l'angle entre le pendule et la verticale. Le pendule est lâché d'un angle θ_0 , $0 < \theta_0 < \pi/2$, sans vitesse initiale.

1. Montrer que l'angle θ vérifie l'équation :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega^2 \cos(\theta) = \text{constante}$$

Préciser les expressions de ω et de la constante.

2. Montrer que l'expression de la période peut s'écrire :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

On précisera l'expression de T_0 .

3. On réalise le changement de variable $\sin \phi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}$. En déduire que T se met sous la forme :

$$T = T_0 f\left(\sin \frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \phi}}$$

4. Montrer que, pour de petites oscillations, l'expression précédente conduit à la formule approchée de Borda :

$$T \simeq T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

5.  On se place dans le cas particulier où $\ell = 1,0$ m et $g = 9,8$ m.s⁻².

En utilisant le script Python du fichier *PenduleGrandesOscillations.py*, déterminer l'angle limite θ_ℓ au delà duquel la période T s'écarte de plus de 1% de T_0 , puis de plus de 1% de l'expression de la période approchée avec la formule de Borda.

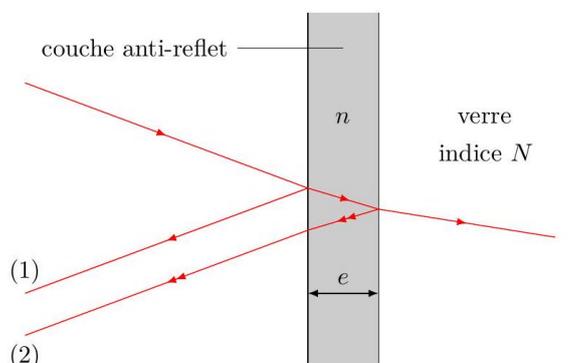
3 Panneaux solaires anti-reflet

Les panneaux solaires les plus performants ont actuellement un rendement de 25%. On cherche à savoir ici quel gain on peut obtenir en utilisant une couche anti-reflet. L'ensemble des cellules photovoltaïques est protégé par une plaque de verre d'indice $N = 1,50$. Les coefficients de réflexion r et transmission t d'un dioptre sont donnés par

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

1. On suppose qu'une onde incidente monochromatique, d'éclairement E_0 et de longueur d'onde $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ et de pulsation ω_0 arrive sur la plaque. En considérant $n_{\text{air}} = 1$, quelle est la puissance perdue par réflexion sur un panneau ?

Une couche d'épaisseur e d'un milieu transparent d'indice n tel que $1 \leq n \leq N$ est déposée sur le verre. On ne tiendra compte que des deux premières réflexions sur chacun des dioptres.



2. Expliquer qualitativement comment un tel dispositif peut réduire la puissance réfléchie.
3. On suppose que l'onde incidente arrive en incidence normale. Quels sont les éclairements E_1 et E_2 des ondes réfléchies ? Exprimer la différence de marche δ ; en déduire l'épaisseur minimale de la couche anti-reflets. En utilisant le script Python grâce au script Python *CoucheAntiReflets.py*, déterminer la valeur optimale de n .

La lumière du soleil n'est pas monochromatique, on considère alors que la densité spectrale de l'onde incidente est $J_0(\omega)$. Les densités spectrales des ondes réfléchies sont alors $J_1(\omega) = \alpha_1 J_0(\omega)$ et $J_2(\omega) = \alpha_2 J_0(\omega)$ où les coefficients α_1 et α_2 dépendent de n et N et ont été calculés à la question 2.

L'éclairement de l'onde totale réfléchie à pour la bande de pulsations comprise entre ω et $\omega + d\omega$ est :

$$dE_r = \left[J_1(\omega) + J_2(\omega) + 2\sqrt{J_1(\omega)J_2(\omega)} \cos\left(\frac{\omega\delta}{c}\right) \right] d\omega \quad \text{avec} \quad \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}.$$

4. En supposant $J_0(\omega)$ constante sur tout le spectre, exprimer l'éclairement total E_r de l'onde réfléchie ; étudier le coefficient de réflexion en éclairement $R = E_r/E_0$ grâce au programme Python *CoucheAntiReflets.py*. Quelle doit être l'épaisseur de la couche pour une efficacité maximale ? Quel gain obtient-on par rapport à un panneau solaire dépourvu d'une telle couche ?
5. Comment peut-on définir un coefficient de réflexion $R(i)$ en puissance pour une incidence i quelconque ? Compléter éventuellement le programme Python pour étudier ce coefficient $R(i)$. Que pensez-vous de l'efficacité d'une telle couche pour des angles d'incidence importants ?

4 Méthode Flash-Laser

On considère une pièce cylindrique de rayon r , de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c , de masse volumique ρ et d'épaisseur e .

1. On suppose d'abord l'épaisseur e très petite de façon à pouvoir supposer la température uniforme $T(t)$ au sein de la pièce à un instant donné. La pièce est chauffée uniformément par une source de puissance P mise en route à l'instant $t = 0$, instant auquel la température intérieure T initiale vaut T_0 , température de l'extérieur.
 - a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la température T de la pièce en considérant que le flux thermique des pertes conducto-convectives est modélisé par une loi de Newton de la forme $P_{\text{th}} = h(T - T_0)S$, où h est le coefficient d'échange et S la surface de la pièce.
 - b) En déduire l'expression de la température T de la pièce en fonction du temps en introduisant un temps caractéristique τ .
 - c) On suppose que le chauffage s'effectue pendant une durée t_0 très inférieure à τ . En déduire une expression approchée de la température sur l'intervalle de temps $[0, t_0]$. Quelle est la valeur maximale T_{max} atteinte par T ?
 - d) Donner ensuite l'expression de T sur l'intervalle $[t_0, +\infty]$.
 - e) En supposant que $\forall t_0, P \times t_0 = E$ (constant), que devient l'allure de la température si $t_0 \rightarrow 0$?
2. On s'intéresse désormais à la conduction axiale au sein de la pièce.
 - a) Établir l'équation de la diffusion thermique en supposant que $T = T(z, t)$ au sein du solide.
 - b) En utilisant le modèle de Parker (voir l'annexe), donner l'expression de la température réduite sur la face arrière de la pièce définie par $u(t) = (T(e, t) - T_0) / (T_{\text{max}} - T_0)$. Approcher cette expression pour les instants supérieurs au temps caractéristique de la diffusion (d'après le modèle de Parker).
 - c) Compléter le script PYTHON fourni pour donner les représentations graphiques analytique exacte et approchée de la température réduite.
 - d) En déduire que le temps de demi-montée $t_{1/2}$ (pour lequel u vaut 1/2) permet de déterminer la diffusivité thermique du matériaux.
3. Étude du Dural.
 - a) À l'aide de l'expérience de Balageas (détaillée dans l'annexe), estimer la diffusivité D du Dural.
 - b) Comparer les temps caractéristiques des pertes convectives (pour $h = 5 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$) et de la conduction au sein de la pièce. Que penser de l'hypothèse consistant à négliger les pertes convectives?
 - c) Estimer l'énergie apportée par la source à la face avant.
 - d) Quelles critiques peuvent être formulées concernant le modèle de Parker?

Annexe

Méthode de Parker

La technique flash laser a été développée par Parker (1960) afin d'obtenir des mesures rapides de la conductivité thermique d'échantillons de petites dimensions. Elle consiste à envoyer une impulsion très brève sur la face avant d'un échantillon cylindrique de faible épaisseur. Ensuite, l'analyse de l'évolution de la température sur la face arrière en fonction du temps permet la détermination de la diffusivité thermique. Le Modèle de Parker consiste à considérer un disque parfaitement isolé d'épaisseur e et de rayon r . Initialement, l'échantillon reçoit une impulsion énergétique de très courte durée, l'absorption de l'énergie s'effectue en surface de façon uniforme. Les pertes convectives sont supposés nulles sur toutes les faces et le flux thermique se propage parallèlement à l'axe de l'échantillon. La résolution de l'équation de la chaleur dans ces conditions s'obtient par une méthode de séparation de variables ou à l'aide de la transformation de Laplace. À une profondeur z donnée de l'échantillon, la solution s'écrit comme suit où D est la diffusivité thermique du matériau :

$$T(z, t) = T_0 + (T_{\max} - T_0) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi z}{e}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{e^2}\right) \right)$$

La mesure des variations de température en faces avant ou arrière, peut être réalisée à l'aide de thermocouples ou de détecteurs de rayonnement infrarouge. Les thermocouples sont utilisés en général pour les basses températures et des matériaux épais. Cependant pour l'étude en régimes transitoires rapides, ou dans les conditions de hautes températures, l'utilisation de détecteurs infrarouges est préconisée. Le choix du détecteur s'effectuant suivant la gamme de température de travail. La figure 1 donne un exemple de montage :

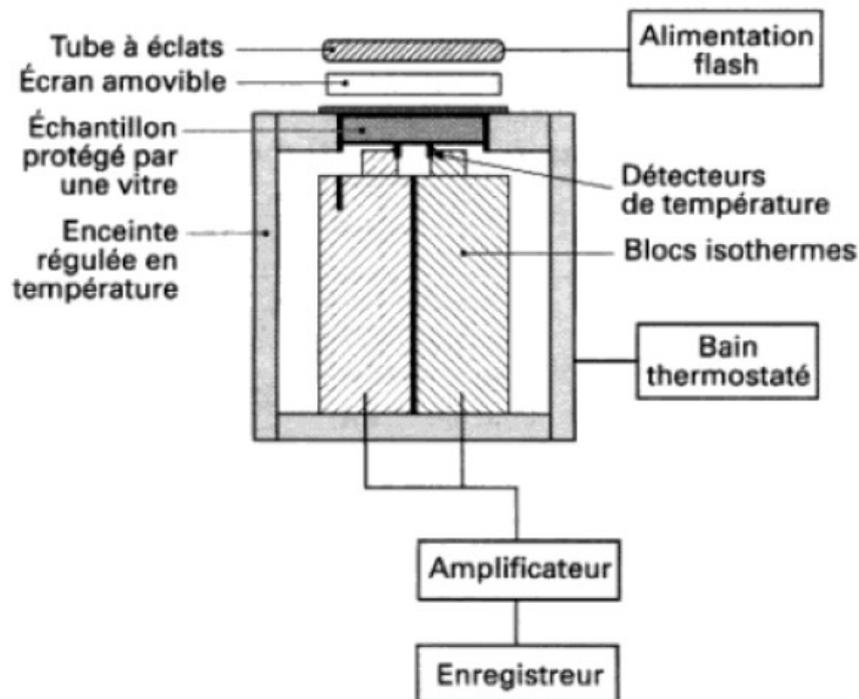


FIGURE 1 – Exemple de montage expérimental de méthode Flash-Laser

Étude du Dural

Le Dural (ou duralumin ou encore duraluminium) est un alliage d'aluminium et de cuivre utilisé en aéronautique en raison de sa grande résistance aux contraintes et de sa plus faible densité que l'acier. Sa densité n'est que de 2,8. Sa capacité thermique massique est $c = 880 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Des mesures de diffusivité en faces arrière ont été réalisées (Daniel Balageas, ONERA Département Matériaux et Structures) sur une plaque de Dural, illuminée par 2 lampes flash créant des illuminations de 4 ms (maximum de l'intensité à moins de 2 ms) avec au niveau de l'échantillon en face avant une énergie surfacique ϵ . La température surfacique était enregistrée par une caméra Jade LW Cedip à la fréquence image de 200 Hz. Une mesure en face arrière est faite afin de disposer d'une valeur à priori fiable de la diffusivité (méthode de Parker). Deux thermogrammes sont présentés : la température d'un pixel unique (courbe grise) et celle de la moyenne d'une zone circulaire centrale de 194 pixels, centrée sur ce pixel. La moyenne d'une zone de 194 pixels conduit à un rapport signal sur bruit de 62.

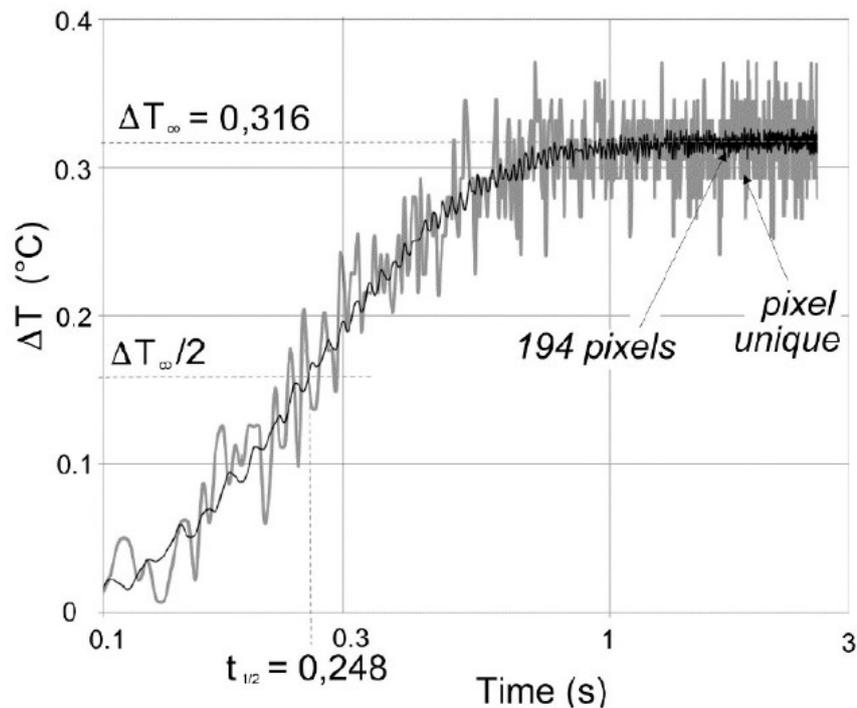


FIGURE 2 – Thermogramme d'une plaque de Dural de surface $S = 0,01 \text{ m}^2$ et d'épaisseur $e = 1 \text{ cm}$