DM n°2 : pour le vendredi 22 septembre

1 Capteur de position

On se propose d'étudier le principe d'un capteur de position à inductance variable. Ce capteur comprend un circuit magnétique composé d'un noyau de fer fixe sur lequel sont enroulées deux bobines B1 et B2, identiques. Un lame métallique est introduite comme indiqué sur le figure 1, sa position étant variable et repérée par Δz. En pratique cette lame est solidaire d'un objet dont on veut mesurer la position.

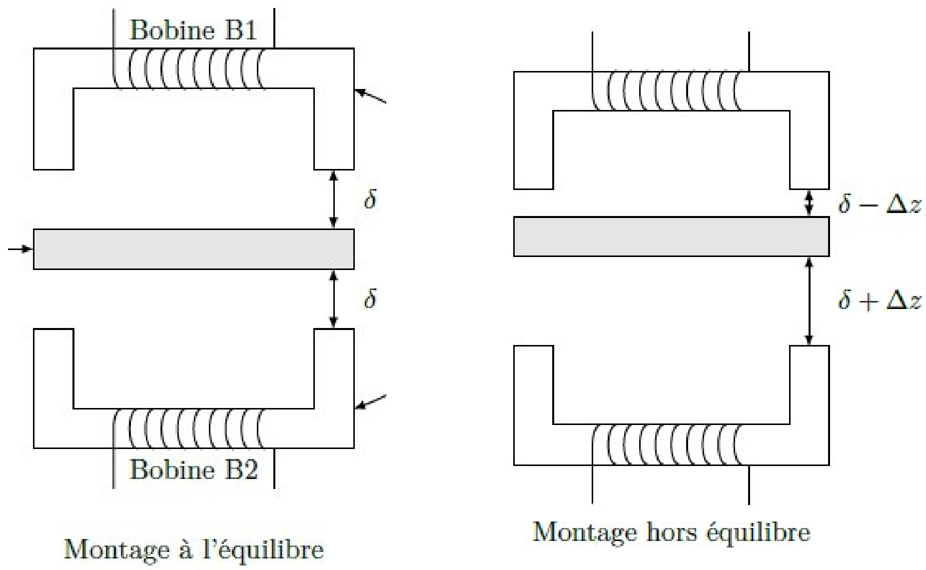


Figure 1

À l'équilibre, la lame est équidistante des deux bobines (figure 3 à gauche). Un déplacement de Δz di-symétrise le montage (par exemple, la lame s'approche de B1 et s'éloigne de B2 comme représenté sur la figure 3 à droite). Dans cette situation, les inductances de B1 et B2 valent respectivement :

$$L_1 = L_e\left(1 + \frac{\Delta z}{\delta}\right) \quad \text{et} \quad L_2 = L_e\left(1 - \frac{\Delta z}{\delta}\right)$$

où L_e est la valeur commune de l'inductance dans la situation d'équilibre.

Les bobines B1 et B2 sont alimentées par un générateur délivrant une tension électrique $e(t) = E\cos(\omega t)$, de pulsation ω, en série avec une résistance R (figure 2). On néglige ici les résistances des deux bobines.

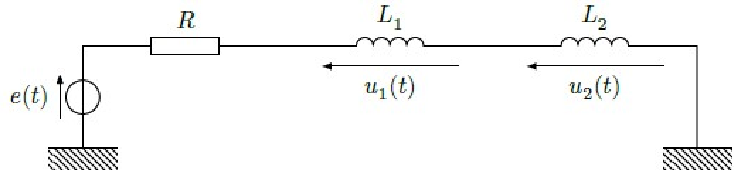


Figure 2

1. Déterminer les expressions des tensions électriques complexes $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_2$ en fonction de R, L_1, L_2, ω et $\underline{e}$.

   Ces tensions sont placées à l'entrée du montage présenté figure 3. L'ALI est supposé idéal en fonctionnement linéaire.

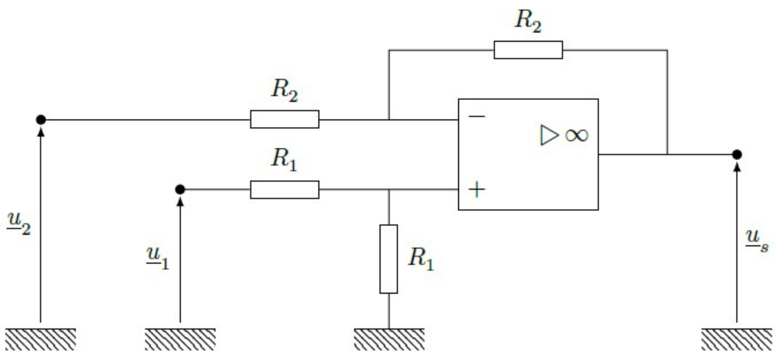


Figure 3

2. Montrer que la tension électrique de sortie du montage peut s'écrire sous la forme $\underline{u}_s = K\left(\underline{u}_1 - \underline{u}_2\right)$ où K est une constante que l'on déterminera en fonction des composants du montage.
3. Exprimer la fonction de transfert complexe $T(j\omega)$ sous la forme :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{e}} = T_0 \frac{j(\omega/\omega_0)}{1 + j(\omega/\omega_0)}$$

   où T_0 et ω_0 sont des fonctions de L_e, R, Δz et δ, que l'on déterminera.
4. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de $\underline{T}(j\omega)$.
5. De quel type de filtre s'agit-il ? Quelle est la signification de la pulsation ω_0 ?
6. Dans quelle gamme de fréquences doit-on travailler pour que $\underline{T}(j\omega)$ soit indépendant de ω et proportionnel au déplacement de la lame ?

   On a $R = 750\ \Omega$, $L_e = 60$ mH et une fréquence d'utilisation $f = 4$ kHz.
7. Montrer que le signal de sortie peut se mettre sous la forme $u_s(t) = E\,\frac{\Delta z}{\delta}\cos(\omega t + \varphi)$ et exprimer et calculer le déphasage φ.

Électronique de conditionnement

On souhaite obtenir un signal continu image de la position Δz de la lame. On utilise pour cela un multiplieur analogique, avec une constante de multiplication K_m, dans le montage donné figure 4. On aura donc : $s_m(t) = K_m u \times u$.

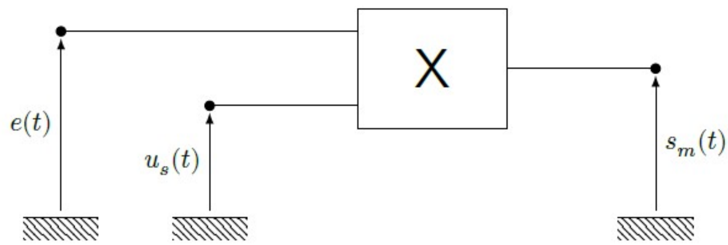
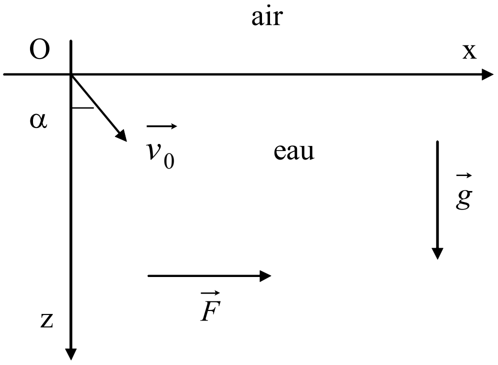


Figure 4

8. Exprimer la tension électrique $s_m(t)$ à la sortie du multiplieur et donner sa décomposition spectrale. Préciser le terme représentatif de la position Δz de la lame.
9. Quel montage doit-on placer à la sortie du multiplieur pour récupérer une tension continue S_m proportionnelle au déplacement Δz ? Préciser la nature et les caractéristiques de ce montage.

10. Exprimer la sensibilité du capteur définie par $S_m/\Delta z$.
11. Application numérique Le capteur permet de mesurer la tension de sortie à 10 mV près. En déduire la plus petite valeur de $\Delta z/\delta$ mesurable. On prendra $E = 6{,}00$ V et $K_m = 1{,}00$ V^{-1}.

2 Tir dans l'eau



Une bille de masse m est à lancée dans l'eau d'une rivière. Elle pénètre au point O avec une vitesse $\vec{v}_0$ inclinée d'un angle α par rapport à la verticale. La bille M, bien qu'assimilée à un point matériel, a un certain volume V et une masse volumique μ plus faible que la masse volumique de l'eau μ_e : $\mu = 3/4\,\mu_e$. En plus de la pesanteur, la bille est soumise à la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A$ et à une force de frottement fluide d'expression $\vec{f} = -h\,\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse de la bille à un instant quelconque et h un coefficient positif. Par ailleurs, l'action du courant de la rivière sur M équivaut à une force $\vec{F} = F\vec{e}_x$ où $\vec{e}_x$ représente le vecteur unitaire du sens du courant et F une constante positive.

1. Justifier que l'expression de $\vec{\Pi}_A$ est : $\vec{\Pi}_A = -\dfrac{4}{3}\,m\vec{g}$.
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique et donner ses projections dans le repère (Oxz).
3. Déterminer l'expression de la vitesse de la bille M lors de son trajet dans l'eau. Montrer qu'elle tend vers une vitesse limite $\vec{v}_{lim}$ que l'on calculera.
4. Déterminer les lois horaires $x(t)$ et $z(t)$. Représenter schématiquement l'allure de la trajectoire.
5. Le projectile revient à la surface de l'eau en un point A . Ce résultat est-il surprenant ? On suppose que la date t_A est suffisamment grande pour négliger certains termes. En vous plaçant dans cette approximation, calculer la distance d horizontale qui sépare le point d'émergence A du point d'impact O.

3 Mouvement d'une perle sur un cercle

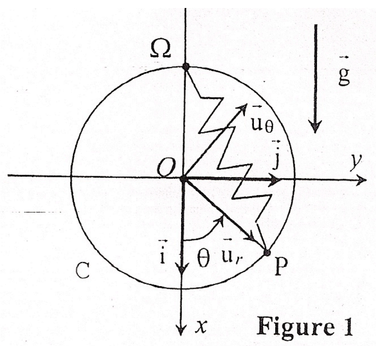


Figure 1

Soit R le référentiel terrestre, supposé galiléen et muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Le dispositif étudié est constitué d'un cercle (C) fixe dans R, de rayon a et de centre O, contenu dans le plan vertical (Oxy) de verticale descendante Ox et d'une perle P de masse m, astreinte à se déplacer sur (C). On note Ω le point du cercle de coordonnées $(-a, 0, 0)$.

La position de P est repérée par l'angle $\theta = (Ox, \overrightarrow{OP})$, avec $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$. On note $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OP}$ et $\vec{u}_\theta$ le vecteur unitaire déduit de $\vec{u}_r$ par la rotation de $+\pi/2$ autour de Oz (Figure 1).

Les expressions vectorielles demandées seront exprimées dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

I. Mouvement avec un ressort

1. Montrer que l'angle $\alpha = (\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega P})$ vaut $\theta/2$.
2. Déterminer l'expression de $\overrightarrow{\Omega P}$ en fonction de a et de l'angle $\alpha = \theta/2$. En déduire la norme $\Omega P = \| \overrightarrow{\Omega P} \|$ en fonction des mêmes grandeurs.

   Dans les questions qui suivent, la perle est attachée à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0. L'autre extrémité du ressort est fixée en Ω (Figure 1). On suppose que le mouvement est sans frottement.
3. Déterminer l'expression de la tension $\vec{F}_R$ exercée par le ressort en fonction de k, a, L_0 et α.
4. Montrer que lorsque le mouvement de P a lieu, son équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta} - \frac{k}{m}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{L_0}{a}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{2g}{a}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

5. Déterminer l'énergie potentielle totale $E_P(\theta)$ de la perle en fonction de l'angle θ. En déduire l'énergie mécanique E_m en fonction de θ et de $\dot{\theta}$.
6. Retrouver l'équation de la question 4. à partir d'un raisonnement sur E_m.

   On étudie maintenant le cas particulier suivant :

$$L_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a \quad ; \quad a = \frac{2\,mg}{k}$$

7. Déterminer toutes les positions d'équilibre $\theta_{\text{éq}}$ envisageables pour la perle. Dans chaque cas, on étudiera la stabilité de l'équilibre.
8. Pour étudier les petits mouvements autour de la position $\theta_1 = 60°$, on pose $\theta = \theta_1 + \varepsilon$, avec $\varepsilon << 1$ et on rappelle que, lorsque x est suffisamment proche de zéro : $\cos x \approx 1$ et $\sin x \approx x$.

   Établir les expressions approchées de $\cos(\theta/2)$ et de $\sin(\theta/2)$ sous la forme de fonctions affines de du type $a\,\varepsilon + b$ où a et b sont des constantes à déterminer dans chacun des deux cas.
9. En négligeant tous les termes de la forme ε^n lorsque $n > 1$, montrer que l'équation différentielle vérifiée par ε peut se mettre sous la forme approchée :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{8m}\,\varepsilon = 0$$

10. Quelle est la nature du mouvement autour de θ_1 ? En expliciter une durée caractéristique.