

Le produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ 

Dans toute cette section,  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure canonique de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Tout élément de  $\mathbb{R}^3$  est un triplet de réels de la forme  $(a_1, a_2, a_3)$  que l'on note à la façon des physiciens, c'est à dire :

$$(a_1, a_2, a_3) \stackrel{\text{notation}}{=} \vec{a} \quad (1)$$

En utilisant l'addition et la loi externe dans  $\mathbb{R}^3$  on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ &= a_1 (1, 0, 0) + a_2 (0, 1, 0) + a_3 (0, 0, 1) \end{aligned}$$

On note :

$$\vec{e}_x = (1, 0, 0) ; \quad \vec{e}_y = (0, 1, 0) \quad \text{et} \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1) \quad (2)$$

Le triplet  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  forme la *base canonique* de  $\mathbb{R}^3$ . Pour un physicien, cette base est aussi appelée *base cartésienne attachée à un repère absolu*  $R_a$ . On peut donc écrire :

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_x + a_2 \vec{e}_y + a_3 \vec{e}_z \quad (3)$$

Les trois réels  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont appelés *coordonnées* du vecteur  $\vec{a}$  dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . De façon générale, au lieu de  $a_1, a_2$  et  $a_3$ , on les notera plutôt  $a_x, a_y$  et  $a_z$ .

Enfin, on munit  $\mathbb{R}^3$  de son *produit scalaire canonique*. Dans le cas où  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  et  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , on a :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{\text{déf}}{=} a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (4)$$

Pour exprimer les lois de la physique, il est très commode de définir un autre produit sur  $\mathbb{R}^3$  : le *produit vectoriel*.

## 1) Définitions

**Définition 1.**

Soit  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \varphi(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbb{R}^3$  une application. On dit que :

a)  $\varphi$  est linéaire à gauche ssi pour tous vecteur  $\vec{a}, \vec{b}$  et  $\vec{c}$  et pour tout réel  $\lambda$  on a :

$$\varphi(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = \varphi(\vec{a}, \vec{c}) + \varphi(\vec{b}, \vec{c}) \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda \varphi(\vec{a}, \vec{b})$$

b)  $\varphi$  est linéaire à droite ssi pour tous vecteur  $\vec{a}, \vec{b}$  et  $\vec{c}$  et pour tout réel  $\lambda$  on a :

$$\varphi(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = \varphi(\vec{a}, \vec{b}) + \varphi(\vec{a}, \vec{c}) \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda \varphi(\vec{a}, \vec{b})$$

c)  $\varphi$  est bilinéaire ssi elle est à la fois bilinéaire à gauche et à droite.

d)  $\varphi$  est antisymétrique ssi pour tous vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  on a :

$$\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = -\varphi(\vec{b}, \vec{a})$$

De ces définitions il résulte deux propriétés immédiates :

1. Si  $\varphi$  est une application bilinéaire, alors pour tout vecteur  $\vec{a}$  on a :

$$\varphi(\vec{0}, \vec{a}) = \varphi(\vec{a}, \vec{0}) = \varphi \vec{0} \quad (5)$$

En effet, on a par exemple,  $\vec{c}$  étant un vecteur quelconque :

$$\varphi(\vec{0}, \vec{a}) = \varphi(0 \vec{c}, \vec{a}) = 0 \varphi(\vec{c}, \vec{a}) = \vec{0}.$$

2. Dans le cas où  $\varphi$  est une application antisymétrique, on a nécessairement :

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3, \varphi(\vec{a}, \vec{a}) = -\varphi(\vec{a}, \vec{a}) \implies \varphi(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{0} \quad (6)$$

\*\*\*\*\*

Soit  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une application bilinéaire antisymétrique.

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  étant la base canonique (cartésienne) de  $\mathbb{R}^3$ , tous vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  peuvent se décomposer de façon unique sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = (a_x, a_y, a_z) \\ \vec{b} &= b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z = (b_x, b_y, b_z) \end{aligned}$$

En utilisant successivement la linéarité de  $\varphi$  à gauche et à droite, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{a}, \vec{b}) &= a_x \varphi(\vec{e}_x, \vec{b}) + a_y \varphi(\vec{e}_y, \vec{b}) + a_z \varphi(\vec{e}_z, \vec{b}) \\ &= a_x b_x \varphi(\vec{e}_x, \vec{e}_x) + a_x b_y \varphi(\vec{e}_x, \vec{e}_y) + a_x b_z \varphi(\vec{e}_x, \vec{e}_z) \\ &\quad + a_y b_x \varphi(\vec{e}_y, \vec{e}_x) + a_y b_y \varphi(\vec{e}_y, \vec{e}_y) + a_y b_z \varphi(\vec{e}_y, \vec{e}_z) \\ &\quad + a_z b_x \varphi(\vec{e}_z, \vec{e}_x) + a_z b_y \varphi(\vec{e}_z, \vec{e}_y) + a_z b_z \varphi(\vec{e}_z, \vec{e}_z) \end{aligned}$$

Comme  $\varphi$  est antisymétrique on a forcément  $\varphi(\vec{e}_x, \vec{e}_x) = \varphi(\vec{e}_y, \vec{e}_y) = \varphi(\vec{e}_z, \vec{e}_z) = \vec{0}$ . De plus, on peut réordonner les termes du membre de droite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{a}, \vec{b}) &= (a_x b_y - a_y b_x) \varphi(\vec{e}_x, \vec{e}_y) \\ &\quad + (a_x b_z - a_z b_x) \varphi(\vec{e}_x, \vec{e}_z) \\ &\quad + (a_y b_z - a_z b_y) \varphi(\vec{e}_y, \vec{e}_z) \end{aligned} \tag{7}$$

On remarque donc que  $\varphi$  est parfaitement déterminée si on connaît les trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  ci-dessous :

$$\varphi(\vec{e}_x, \vec{e}_y) ; \quad \varphi(\vec{e}_z, \vec{e}_x) = -\varphi(\vec{e}_x, \vec{e}_z) \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

Ceci amène donc la définition suivante :

**Définition 2.**

On appelle produit vectoriel canonique de  $\mathbb{R}^3$  l'application bilinéaire antisymétrique vérifiant :

$$\varphi(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = \vec{e}_z ; \quad \varphi(\vec{e}_z, \vec{e}_x) = \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{e}_y, \vec{e}_z) = \vec{e}_x \tag{8}$$

**Changement de notation :** pour le produit vectoriel canonique, on adopte la notation suivante :

$$\forall (\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\vec{a}, \vec{b}) \stackrel{\text{noté}}{=} \vec{a} \wedge \vec{b} \tag{9}$$

qui se prononce "  $\vec{a}$  vectoriel  $\vec{b}$  ". Il s'ensuit que :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z ; \quad \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y ; \quad \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x \tag{10}$$

L'équation (7) se transforme donc en :

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z \\ &\quad + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_y \\ &\quad + (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x \end{aligned}$$

c'est à dire, en utilisant la notation traditionnelle des déterminants d'ordre 2 :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \vec{e}_x + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \vec{e}_z \tag{11}$$

**2) Produit mixte**

**Définition.**

Soient  $\vec{a}, \vec{b}$  et  $\vec{c}$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . On définit leur produit mixte par :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \stackrel{\text{déf}}{=} (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

En utilisant l'équation (11) et en notant  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , c'est à dire :

$$\vec{c} = c_x \vec{e}_x + c_y \vec{e}_y + c_z \vec{e}_z$$

on obtient :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} c_x + \begin{vmatrix} a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} c_z \quad (12)$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \quad (13)$$

car on reconnaît le développement du déterminant d'ordre 3 selon la troisième colonne.

La formule (13) constitue la formule pratique pour calculer le produit mixte dans le cas général. Toutefois, dans les cas très simples on préfère utiliser directement la définition  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$

### Proposition.

Pour tous vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  de  $\mathbb{R}^3$  on a :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

ce qui signifie que le produit mixte est invariant par permutation circulaire des trois vecteurs.

Preuve :

Cela se démontre en utilisant les propriétés d'un déterminant lorsque permute deux colonnes. En effet, on peut écrire :

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & a_x & b_x \\ c_y & a_y & b_y \\ c_z & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & c_x & a_x \\ b_y & c_y & a_y \\ b_z & c_z & a_z \end{vmatrix}$$

CQFD.

### 3) Propriétés du produit vectoriel

**P<sub>1</sub>** Si  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont deux vecteurs colinéaires, alors  $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ .

En particulier, pour tout vecteur  $\vec{a}$  :  $\vec{0} \wedge \vec{a} = \vec{0}$  et  $\vec{a} \wedge \vec{0} = \vec{0}$

Preuve :

$\vec{a}$  et  $\vec{b}$  étant colinéaires,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  t.q.  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$  ou bien  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ . Supposons que le premier cas soit réalisé ; il vient :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\lambda \vec{b}) \wedge \vec{b} = \lambda (\vec{b} \wedge \vec{b}) = \vec{0}$$

On obtient le même résultat si on suppose que  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ .

CQFD.

**P<sub>2</sub>** Pour tous vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  on a  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$  et  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$

Autrement dit :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \perp \vec{a} \quad \text{et} \quad (\vec{a} \wedge \vec{b}) \perp \vec{b}$$

Preuve :

Décomposons les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sur la base canonique (cartésienne) :

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$$

puis utilisons le produit mixte. Il vient :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{a} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & a_x \\ a_y & b_y & a_y \\ a_z & b_z & a_z \end{vmatrix} = 0$$

puisque tout déterminant ayant deux vecteurs colonnes identiques est forcément nul.

On obtient bien sûr le même résultat en considérant  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}] = 0$ .  
CQFD.

**P<sub>3</sub>** Si  $\vec{a} \perp \vec{b}$  alors  $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$

Preuve :

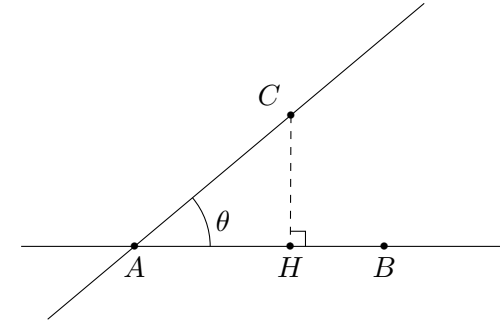
Cela se démontre à partir de l'expression (11) de  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  en supposant que  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ . En effet :

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 &= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\ &= a_y^2 b_z^2 + a_z^2 b_y^2 - 2 a_y a_z b_y b_z \\ &\quad + a_z^2 b_x^2 + a_x^2 b_z^2 - 2 a_x a_z b_x b_z \\ &\quad + a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 - 2 a_x a_y b_x b_y \\ &= a_x^2 (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - a_x^2 b_x^2 - 2 a_y a_z b_y b_z \\ &\quad + a_y^2 (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - a_y^2 b_y^2 - 2 a_x a_z b_x b_z \\ &\quad + a_z^2 (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - a_z^2 b_z^2 - 2 a_x a_y b_x b_y \\ &= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) \|\vec{b}\|^2 - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \end{aligned}$$

On a donc bien :  $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$   
CQFD.

**P<sub>4</sub>** Soient  $A, B$  et  $C$  trois points tels que  $B \neq A$  et  $C \neq A$ . Alors en introduisant l'angle  $\theta = (\widehat{AB, AC}) \in [0, \pi]$  on a :

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \sin \theta$$



Preuve :

Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur la droite  $(AB)$ . Grâce à la relation de Chasles nous avons :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$$

Or  $A, H$  et  $B$  étant trois points alignés, il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AB}$  (cette relation étant valable non seulement si  $A, H$  et  $B$  sont distincts deux à deux, mais aussi lorsque  $H = A$  ou bien  $H = B$ ). Il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HC} \end{aligned}$$

Grâce à la propriété P<sub>3</sub> on en déduit que :

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{HC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \sin \theta$$

puisque l'on remarque que  $\|\overrightarrow{HC}\| = \|\overrightarrow{AC}\| \sin \theta$ .

CQFD.

**P<sub>5</sub>** (Formule du double produit vectoriel). *Pour tous vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}$  et  $\vec{c}$  de  $\mathbb{R}^3$ , on a :*

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (14)$$

Cette formule peut se démontrer en posant  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$  puis en utilisant la relation (\*) pour calculer un produit vectoriel. On évalue alors les deux membres de l'équation (14) et on montre qu'ils sont identiques. Ce calcul est long et laborieux et nous ne le ferons pas ici.

**Théorème.**

Soient  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Alors on a l'équivalence ci-dessous :

$$\vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ colinéaires} \iff \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \quad (15)$$

Preuve :

- L'implication  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  colinéaires  $\implies \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$  constitue la propriété P<sub>1</sub> qui a déjà été démontrée.
- Réciproquement, supposons que  $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ .

Ceci est réalisé dans le cas particulier où  $\vec{a} = \vec{0}$  ou bien  $\vec{b} = \vec{0}$  et dans ce cas,  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont forcément colinéaires.

On suppose donc à partir de maintenant que  $\vec{a} \neq \vec{0}$  et  $\vec{b} \neq \vec{0}$ . Soit  $\vec{c}$  un vecteur quelconque. Par la formule du double produit vectoriel on a :

$$\vec{0} = \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{c} \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b}$$

Prenons le cas particulier  $\vec{c} = \vec{a}$ . Il vient  $\vec{c} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \neq 0$  et donc :

$$\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

ce qui montre que  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont colinéaires.

CQFD.

**4) Orientation de  $\mathbb{R}^3$ . Bases directes et indirectes**

Soit  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une autre base, quelconque pour le moment (c'est à dire pas forcément ON). On peut écrire :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \alpha_{11} \vec{e}_x + \alpha_{21} \vec{e}_y + \alpha_{31} \vec{e}_z = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}) \\ \vec{e}_2 &= \alpha_{12} \vec{e}_x + \alpha_{22} \vec{e}_y + \alpha_{32} \vec{e}_z = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}) \\ \vec{e}_3 &= \alpha_{13} \vec{e}_x + \alpha_{23} \vec{e}_y + \alpha_{33} \vec{e}_z = (\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}) \end{aligned}$$

On définit alors la matrice changement de base :

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$S$  est une matrice inversible et donc  $\det S \neq 0$ . Ceci permet de définir les bases directes (ou positives) et les bases indirectes (ou négatives).

Par définition, la **base canonique est directe**. On pose ensuite :

**Définition 1.**

Toute base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  telle que  $\det S > 0$  est directe. Toute base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  telle que  $\det S < 0$  est indirecte.

En physique on ne travaille pratiquement qu'avec des bases O.N. De ce fait, les vecteurs  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$ , qui sont aussi les vecteurs colonnes de la matrice  $S$ , vérifient :

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$$

ce qui entraîne des relations entre les coefficients de  $S$ , par exemple :  $\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1$ ,  $\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = 0$ , etc ...

Mathématiquement on dit que la matrice  $s$  est *orthogonale*. Soit alors  ${}^tS$  la matrice transposée de  $S$ ; un calcul direct un peut long mais qui ne pose aucune difficulté montre que :

$$S({}^tS) = ({}^tS)S = I_3 \quad \text{où} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$I_3$  est donc la matrice identité d'ordre 3. Les égalités précédentes signifient que  ${}^tS = S^{-1}$ . D'autre part, comme  $\det {}^tS = \det S$ , il vient :

$$\det ({}^tS S) = (\det {}^tS) \times \det S = [\det S]^2 = 1 \quad \text{d'où} \quad \det S = \pm 1$$

**Définition 2.**

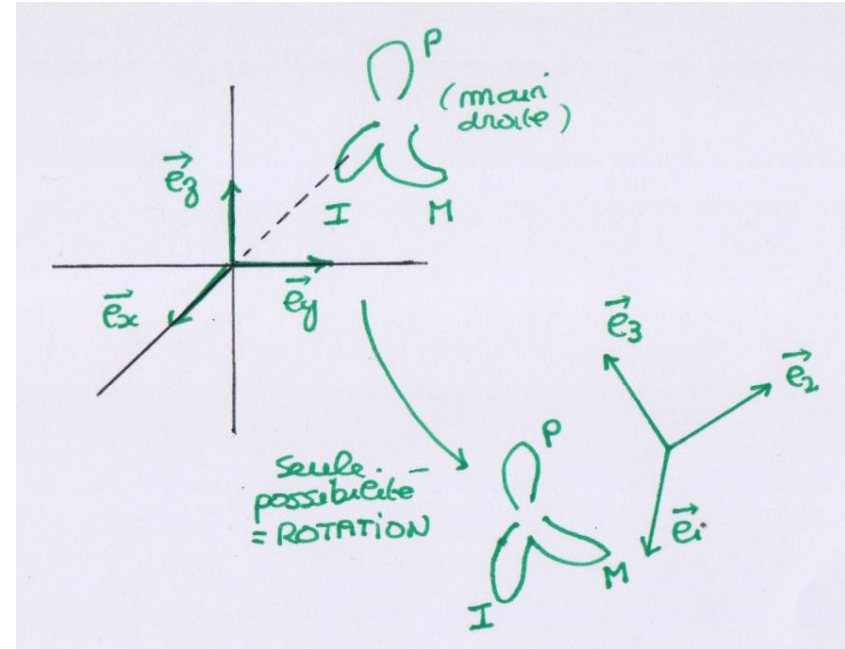
Soit  $\mathbf{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base O.N. de  $\mathbb{R}^3$  et  $S$  la matrice changement de base associée.

- Si  $\det S = 1$  alors  $S$  est une matrice rotation. Dans ce cas,  $\mathbf{e}$  est une base O.N. directe = O.N.D.
- Si  $\det S = -1$  alors  $S$  est une symétrie. Dans ce cas,  $\mathbf{e}$  est une base O.N. indirecte = O.N.I.

**Exemple : base cylindro-polaire**  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . On a :

$$S = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \det S = 1$$

En pratique, les physiciens disposent d'un "truc" simple pour décider si une base est directe ou non : c'est la *règle de la main droite*.



**Proposition.**

Si  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est une base O.N.D. alors :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad ; \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \quad (16)$$

Preuve :

Faisons la démonstration pour  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ . Comme  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est une base, on peut écrire :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3$$

De plus on sait que  $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_1 = 0$  et  $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 = 0$ . Il s'ensuit que :

$$\beta_1 = \beta_2 = 0 \implies \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \beta_3 \vec{e}_3$$

Notons  $\vec{e}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})$ ,  $\vec{e}_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32})$  et  $\vec{e}_3 = (\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33})$ . Il vient :

$$\beta_3 = (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \det S = 1$$

ce qui montre que  $\beta_3 = 1$ .

CQFD.

Cette proposition permet de calculer  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  pour tous vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  directement en les décomposant dans la base O.N.D.  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , sans passer par la base canonique. En effet si on écrit :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \\ \vec{b} &= b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

alors un calcul similaire à celui qui a été mené pour aboutir aux équations (7) et (11) aboutit à :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \quad (17)$$