DM n°3
(Pour le vendredi 6 octobre 2023)

1 Étude d'un satellite

Données :

Constante de gravitation $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}
Rayon de la Terre $R_T = 6\ 400$ km
Masse de la Terre $M_T = 5{,}97.10^{24}$ kg

Dans tout le problème, la Terre est assimilée à une sphère de centre O, de rayon R_T et de masse totale M_T. On suppose que sa répartition de masse est homogène.

I. Lancement d'un satellite

Un satellite assimilé à un corps ponctuel S de masse m est lancé depuis la surface de la Terre. Ce corps n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle de la Terre : on néglige donc les frottements liés à l'atmosphère.

Le mouvement de S est étudié dans le référentiel géocentrique ($\mathscr{R}_G$) supposé galiléen. S est lancé avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ et sous un angle α par rapport à la verticale locale (voir figure 1)

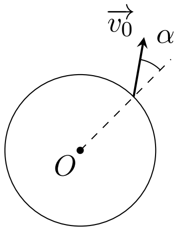

FIGURE 1 – Lancement d'un satellite S depuis la surface de la Terre

1. Le mouvement ultérieur de S sera-il conservatif ? Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m en fonction de m, M_T, R_T, G et $v_0 = \|\overrightarrow{v_0}\|$ puis en fonction de m, R_T, v_0 et g, où g désigne le champ de gravitation à la surface de la Terre.
2. Calculer la norme du moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de S par rapport au centre de la Terre à l'instant du lancement. Montrer que ce moment cinétique se conservera au cours du mouvement.
3. Montrer que la trajectoire de S sera plane et préciser le plan de cette trajectoire en fonction des données initiales (position, vitesse) du mouvement.
4. On suppose que $v_0 < \sqrt{2gR_T}$. Justifier que la trajectoire de S est une ellipse.

II. Satellite en orbite circulaire

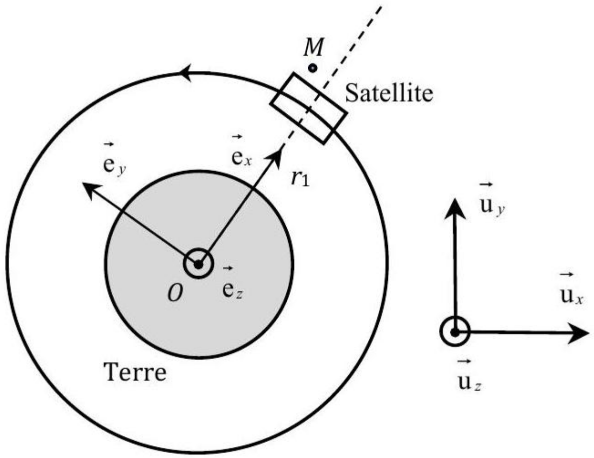

FIGURE 2 – Mouvement circulaire du satellite S autour de la Terre

Par un procédé qu'on ne décrira pas dans ce problème, le satellite S est maintenant placé sur une orbite circulaire autour de la Terre dans le référentiel géocentrique $(\mathscr{R}_G)$, muni d'un repère $R_G = (Oxyz)$ dont les vecteurs de la base cartésienne sont $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. La seule force prise en considération est la force gravitationnelle exercée par la Terre (figure 2).

1. On désigne par r_1 le rayon de la trajectoire et par θ l'angle polaire qui repère la position de S.
   a) Exprimer la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ en fonction de M_T, de G et de r_1. En déduire la norme v_1 de la vitesse de S.
   b) En déduire la période T de révolution du satellite, en orbite à une altitude $h = 400$ km. Faire l'application numérique.

On prend maintenant en compte le mouvement dit de "rotation synchrone" du satellite : celui-ci tourne dans $(\mathscr{R}_G)$ sur lui-même à la même vitesse angulaire ω qu'en 1.a) de manière à présenter toujours la même face à la Terre.

On désigne par $(\mathscr{R}_S)$ le référentiel dans lequel le satellite est immobile et on le munit du repère cartésien $R_S = (O; \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, choisi de telle sorte que le vecteur rotation $\overrightarrow{\omega}\,(R_S/R_G)$ soit $\omega\,\overrightarrow{e_z}$.

On considère le mouvement dans (R_S) d'un spationaute, assimilé à un point M de masse m_0, repéré par son vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = (r_1 + x)\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y}$$

(cf. figure 2.)

On négligera les frottements ainsi que la force de gravitation exercée par le satellite sur le spationaute. La force gravitationnelle exercée sur celui-ci par la Terre s'écrit alors :

$$\overrightarrow{F_g} = -Gm_0M_T\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

2. a) Le référentiel $(\mathscr{R}_S)$ est-il galiléen ?
   b) Faire un bilan des forces auxquelles est soumis M dans $(\mathscr{R}_S)$. On exprimera ces forces dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.
3. On étudie le mouvement général du spationaute au voisinage du satellite, c'est à dire pour $|x| \ll r_1$ et $|y| \ll r_1$.
   a) En utilisant la relation approchée $(1+\varepsilon)^{-3/2} \approx 1 - 3\varepsilon/2$, valable lorsque $|\varepsilon| << 1$, montrer que la somme de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement, à l'ordre le plus bas non nul en x/r_1 et en y/r_1, est égale à $3m_0\omega^2 x\vec{e}_x$.
   b) En déduire que x et y vérifient un système d'équation de la forme :
   $$\begin{cases} \ddot{x} = \Omega^2 x + 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{x} \end{cases}$$
   et donner la valeur de Ω.
4. Le spationaute se trouve à l'instant $t = 0$ alors en M_0 de position $(x = 0, y = 0)$, avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = -\,v_0\,\overrightarrow{e_x}$ avec $v_0 > 0$, par rapport à (R_S).
   a) Déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par x (et uniquement x).
   b) En déduire $x(t), y(t)$ et la nature de la trajectoire suivie par le spationaute.
   c) Au bout de combien de temps le spationaute reviendra-t-il à son point initial ?

2 Substitution sur le bromoéthane

On étudie, à 25°C, l'action d'une solution de soude diluée sur le bromoéthane ; la réaction totale a pour équation :

$$CH_3CH_2Br + OH^- \longrightarrow CH_3CH_2OH + Br^-$$

On utilise des mélanges stœchiométriques en bromoéthane et en ion hydroxyde. Soit C_0 la concentration initiale commune des deux réactifs. Le tableau ci-dessous donne les temps de demi-réaction pour différentes valeurs de C_0.

C_0 (mmol.L^{-1})	10	25	50	75	100
$\tau_{1/2}$ (min)	1100	445	220	150	110

1. (a) À l'aide d'une régression linéaire, démontrer que ces données sont compatibles avec une réaction d'ordre 1 par rapport à chacun des réactifs.

   (b) Déterminer la constante de vitesse k de la réaction.

2. L'énergie d'activation de la réaction est $E_a = 89$ kJ.mol^{-1}. En déduire la valeur littérale puis numérique du temps de demi-réaction à 40 °C lors d'une expérience où C_0 vaut 50 mmol.L^{-1}. On donne $R = 8{,}314$ J.K^{-1}.mol^{1}.

3. On réalise à présent une expérience à 25°C où les concentrations initiales des deux réactifs sont différentes :

$$[\mathrm{EtBr}] = a\,;\ [\mathrm{OH^-}] = b$$

   (a) Établir l'équation différentielle reliant l'avancement volumique de la réaction x au temps t.

   (b) En utilisant l'identité :

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{(b-a)}\left[\frac{1}{(a-x)} - \frac{1}{(b-x)}\right]$$

   établir la relation entre a, b, x et t.

   (c) Exprimer littéralement le temps de demi-réaction $\tau_{1/2}$ de ce système. Application numérique : $[\mathrm{EtBr}] = a = 25$ mmol.L^{-1} ; $[\mathrm{OH^-}] = b = 100$ mmol.L^{1}. Calculer $\tau_{1/2}$.