

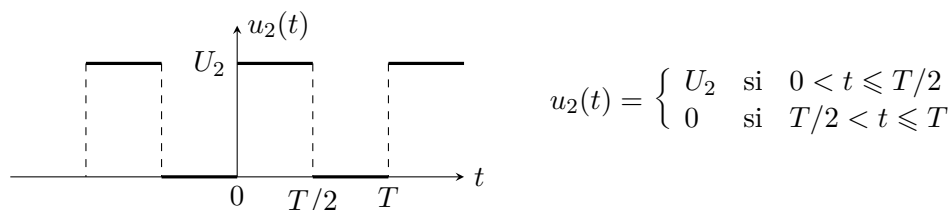
DS n°1 CCINP - e3a
Samedi 30/09/2023 - Durée 4h

1 DIVERS ASPECTS DU FILTRAGE D'UNE TENSION PÉRIODIQUE

On se propose d'étudier différentes propriétés d'un filtre. Dans tout le problème la représentation complexe d'un signal $e(t)$ sera notée $\underline{e}(t)$. Les diagrammes demandés seront directement tracés sur la copie, toutefois le plus grand soin sera apporté à leurs réalisations.

A – Étude préliminaire

On dispose d'un générateur BF (basse fréquence) ; on utilisera ainsi deux tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ de période T et de fréquence $f = 1/T$, définies comme suit : $u_1(t) = U_1 \sin(2\pi ft)$ avec $U_1 = 2$ V et :



avec $U_2 = 2$ V.

On montre que $u_2(t)$ est décomposable en série de Fourier selon :

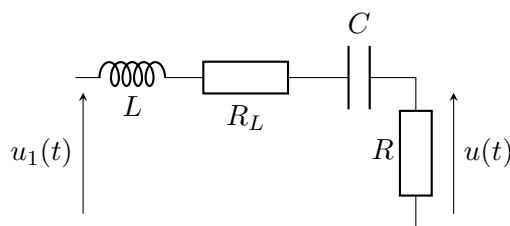
$$u_2(t) = \frac{U_2}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2U_2}{\pi(2p+1)} \sin[(2p+1)2\pi ft]$$

- A1)** Déterminer les valeurs moyennes $\langle u_1 \rangle$ et $\langle u_2 \rangle$.
- A2)** Rappeler la définition de la valeur efficace. Quelles sont les valeurs efficaces de $u_1(t)$ et de $u_2(t)$? Application numérique.

B – Étude d'un filtre en régime sinusoïdal forcé

On se propose de réaliser un filtre simple permettant d'isoler les diverses composantes sinusoïdales d'une tension périodique comme vérification expérimentale du théorème de Fourier.

Un dipôle est constitué par une bobine (inductance L et résistance interne R_L en série), un condensateur de capacité C et une résistance R en série. Il est alimenté par la tension sinusoïdale $u_1(t)$.



On étudie en régime sinusoïdal forcé la réponse $u(t)$, d'amplitude U_m , entre les bornes de la résistance R . On posera :

$$LC\omega_0^2 = 1 ; R' = R + R_L ; Q = \frac{L\omega_0}{R'}$$

- B1)** Établir la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{u}{u_1}$.
- B2)** On définit le gain $G = U_m/U_1$ et $G_{dB} = 20 \log(G)$. Pour quelle valeur de ω , G est-il maximal ? Quelle est alors la valeur de G_{max} ?
- A.N. : calculer ω_0 et la fréquence associée f_0 si $L = 100$ mH, $R_L = 32 \Omega$ et $C = 0,25 \mu\text{F}$.
- B3)** Pour réaliser le filtre on utilise une capacité de précision 5%. Quelle est alors l'incertitude sur ω_0 si on suppose une valeur exacte pour l'inductance ?
- B4)** Déterminer la largeur $\Delta\omega$ de la bande passante à -3 dB en fonction de Q et de ω_0 . Un calcul précis est attendu. On désire pouvoir laisser passer un signal de pulsation ω_0 tout en atténuant au mieux un signal de pulsation $2\omega_0$. Dans quel domaine faut-il choisir R pour qu'il en soit ainsi ?
- B5)** On choisit $R = 20 \Omega$. Donner les valeurs numériques de Q et de $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$. Que vaut le rapport G/G_{max} lorsque $\omega = 1,1\omega_0$; $\omega = 1,5\omega_0$; $\omega = 2,0\omega_0$? Quelle est la nature de ce filtre ? Sa qualité ?
- B6)** Lors d'une étude expérimentale, on applique les tensions $u_1(t)$ et $u(t)$ sur les deux voies d'un oscilloscope. La fréquence de u_1 est $f = 1,1f_0$. La base de temps de l'oscilloscope est réglée sur $0,1$ ms/div et le gain vertical de chaque voie est de $0,5$ V/div.

Représenter l'allure des signaux sur l'écran de l'oscilloscope en adoptant l'échelle : 1 div = 1 cm et en supposant que l'origine de temps (instant $t = 0$) est au centre de l'écran.

C – Séparation des composantes de Fourier de $u_2(t)$

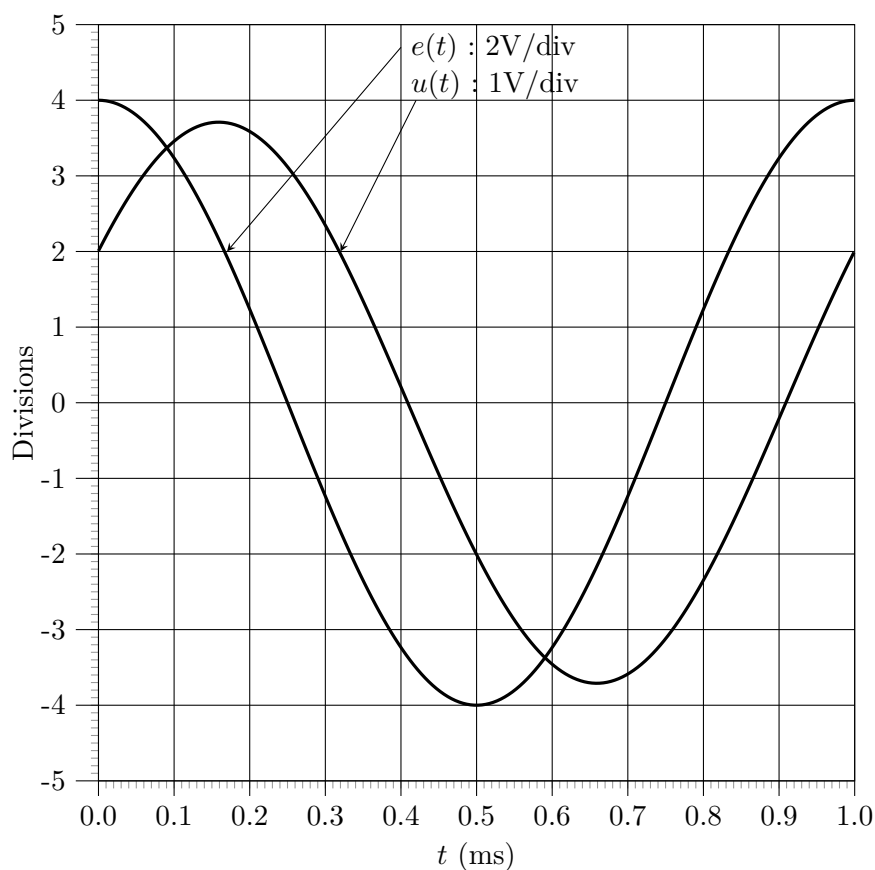
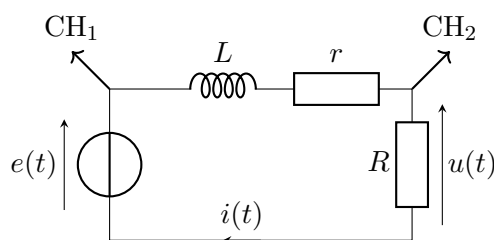
On utilise le filtre étudié dans la partie B avec $L = 100$ mH ; $R_L = 32 \Omega$; $R = 20 \Omega$ et C ajustable. Ce filtre est alimenté avec la tension $u_2(t)$ réglée sur la fréquence $f = 1,0$ kHz.

- C1)** On pose $\omega = 2\pi f$. Quelles sont les pulsations $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 des quatre premières harmoniques non nulles de $u_2(t)$, ainsi que leurs amplitudes associées ?
- C2)** On désire observer entre les bornes de R une tension $u(t)$ sinusoïdale de pulsation ω . Quelle valeur C_1 de C faut-il choisir ? Quelle est alors l'amplitude A_1 de la tension u observée ? Application numérique : calculer A_1 .
- C3)** En toute rigueur, avec cette valeur de C_1 , $u(t)$ est la somme de tensions sinusoïdales de pulsations $\omega_2, \omega_3, \omega_4$, etc... Calculer l'amplitude A_2 de la tension de pulsation ω_2 et le rapport A_2/A_1 . Que dire sans calculs des amplitudes associées aux autres pulsations ?
- C4)** On règle C de façon à observer successivement entre les bornes de R la manifestation des trois harmoniques suivantes de $u(t)$. Quelles valeurs successives C_2, C_3 et C_4 faut-il choisir ? Quelles sont dans chaque cas les amplitudes et les fréquences des tensions observées ? Application numérique : calculer les amplitudes des tensions observées.

2 ANALYSE D'UN CIRCUIT

On alimente le circuit ci-dessous avec une tension sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(2\pi ft)$ délivrée par un GBF (générateur basse fréquence) idéal¹ et on note $u(t) = U_m \cos(2\pi ft + \varphi)$ la tension aux bornes de la résistance R . On branche la voie 1 de l'oscilloscope aux bornes du GBF et la voie 2 aux bornes de R . Les courbes observées sont données ci-dessous. Dans l'expérience réalisée, on a pris $R = 90 \Omega$.

L et r représentent respectivement l'inductance et la résistance d'une bobine réelle.



- 1) Déterminer à partir des courbes la fréquence f ainsi que les amplitudes E_m et U_m . Quelle est l'amplitude I_m de l'intensité $i(t)$ qui traverse le circuit ?
- 2) À l'aide de l'oscillogramme déterminer φ . On donnera sa valeur en radians ainsi que son signe.
- 3) Déterminer les expressions de $L\omega$ et r en fonction de R , E_m/U_m et de φ . A.N. : calculer L et r .

1. C'est à dire qu'on ne considérera jamais sa résistance de sortie de 50Ω dans tout le problème.

- 4) Peut-on visualiser directement la tension u_L aux bornes de la bobine sur l'oscilloscope à l'aide de ce montage ? Justifier.

3 TOBOGGAN AQUATIQUE

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, et cette première partie propose d'étudier leur dimensionnement.

1.1 Étude d'un toboggan rectiligne

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la figure 1. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée h , et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note g l'intensité de la pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

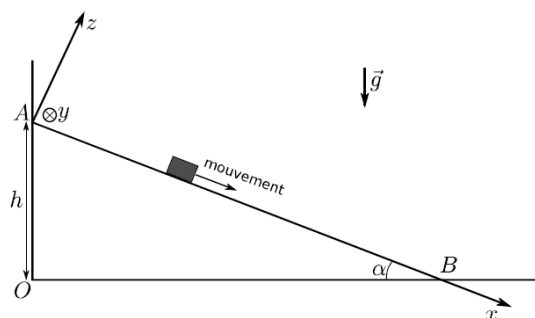


Figure 1. Gauche : photographie du toboggan "le géant" du parc de Wavel Island. Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France, $h = 33$ m et $\alpha \simeq 45^\circ$. Droite : modélisation retenue pour l'étude du toboggan.

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

- 1 - En utilisant une approche énergétique, exprimer la vitesse atteinte au point B par le passager, en fonction de h et de g .

On admet que l'application numérique donne $v_B = 92$ km/h.

- 2 - Ce résultat dépend-il de la forme du toboggan, à h constant ?

On prend maintenant en compte les frottements. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la figure 1 (droite), avec \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon \vec{e}_x seulement.

La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit :

$$\vec{R} = N\vec{e}_z - T\vec{e}_x,$$

où $T > 0$ représente les frottements. On utilise la loi de Coulomb : tout au long du mouvement, on a la relation $T = \mu \times N$ avec μ une constante positive appelée coefficient de frottement. On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement.

- 3 - À l'aide du principe fondamental de la dynamique (aussi appelé seconde loi de Newton), établir l'expression de N en fonction de m , g , et de l'angle α .
- 4 - Exprimer le travail de la force \vec{R} , pour le mouvement entre les points A et B, d'abord en fonction de la longueur AB et de T . Dans un second temps, l'exprimer en fonction de μ , h , m , g et de l'angle α .
- 5 - À l'aide de ce qui précède, établir l'expression de la vitesse atteinte par le passager en B, en fonction de μ , h , g et de l'angle α .

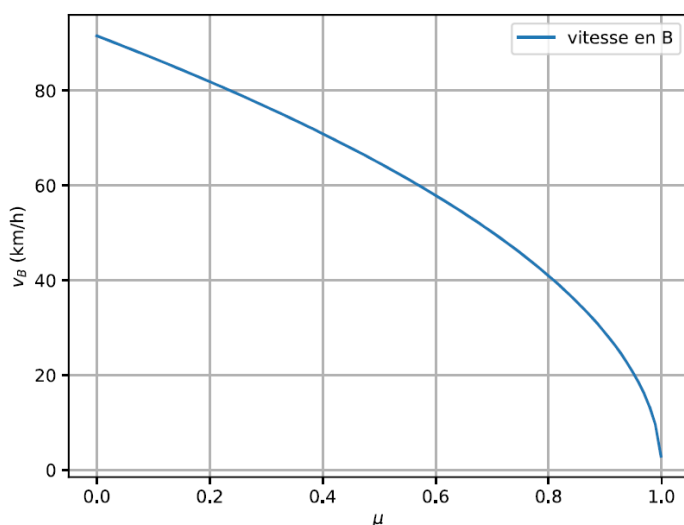


Figure 2 : tracé de l'expression de v_B obtenue dans l'énoncé en fonction du coefficient de frottement μ , pour $\alpha = 45^\circ$.

- 6 - La figure 2 montre un tracé de l'expression précédente de v_B en fonction de μ . La direction du parc d'attraction indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est de 80 km/h. En déduire une estimation de la valeur du coefficient de frottement passager-toboggan.

En bas du toboggan se trouve une longue piste horizontale, dans laquelle le passager va ralentir jusqu'à atteindre une vitesse nulle. On souhaite dimensionner la longueur de cette piste.

- 7 - À l'aide des données précédentes et d'un raisonnement énergétique, indiquer quelle doit être la longueur L de la piste. On attend une expression et une valeur numérique.

1.2 Étude d'un virage

On s'intéresse maintenant à un toboggan possédant un virage. Il est d'abord nécessaire d'établir quelques résultats préliminaires.

1.2.1 Préliminaire : étude des oscillations dans une cuvette

Cette sous-partie est indépendante du reste.

On considère une masse m (point M) astreinte à glisser dans une cuvette de rayon a . Le mouvement a lieu dans le plan Oxy de la figure 3. On néglige tout frottement. On note \vec{g} le vecteur pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la figure 3, avec les vecteurs unitaires \vec{e}_r et \vec{e}_θ .

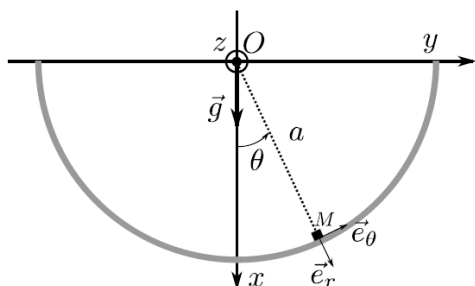


Figure 3 : le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grisé). Il n'y a pas de mouvement selon Oz .

- 8 - Donner l'expression du moment cinétique σ_{Oz} de la masse m selon l'axe Oz , en fonction de m , a et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.
- 9 - Donner les expressions du moment du poids et du moment de la réaction du support par rapport à l'axe Oz , en fonction de m , g , a et θ .
- 10 - En utilisant le théorème du moment cinétique, établir une équation différentielle qui porte sur $\theta(t)$.
- 11 - Proposer une approximation qui permet de résoudre cette équation.
Sous cette hypothèse, résoudre l'équation. On supposera qu'initialement $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
- 12 - Tracer l'allure de la solution $\theta(t)$. On fera apparaître les valeurs maximales et minimales atteintes.
- 13 - Toujours sous l'hypothèse précédente, donner l'expression de la période des oscillations en fonction de a et de g .

1.2.2 Retour au cas du virage dans le toboggan

On étudie un cas où le passager du toboggan arrive avec une vitesse v_0 à l'entrée d'un virage de rayon R_0 . Le toboggan a une forme de gouttière, et l'effet du virage va être de faire monter le passager le long de la gouttière. La question est de savoir jusqu'où il va monter : il faut en effet dimensionner la gouttière pour que le passager ne soit pas éjecté !

On suppose le virage horizontal. On repère par θ la position angulaire du passager dans un plan Oxy représenté figure 4. On se place dans l'approximation où ce plan Oxy , qui se déplace avec le passager, le fait à une vitesse v_0 qui reste constante.

Les informations importantes pour la résolution du problème sont les suivantes :

- Il est possible de mener l'étude dans le plan Oxy uniquement (figure 4, droite).
- Le référentiel dans lequel le plan Oxy est fixe peut être considéré comme galiléen, à condition d'ajouter au bilan des forces qui s'exercent sur le passager une force supplémentaire (parfois appelée "force centrifuge") qui s'écrit $\vec{F} = \frac{mv_0^2}{R_0} \vec{e}_y$.
- Dans le référentiel du plan Oxy , alors considéré galiléen, le passager est donc soumis à son poids \vec{P} , à \vec{F} , et à la réaction normale \vec{N} du toboggan (on néglige tout frottement).

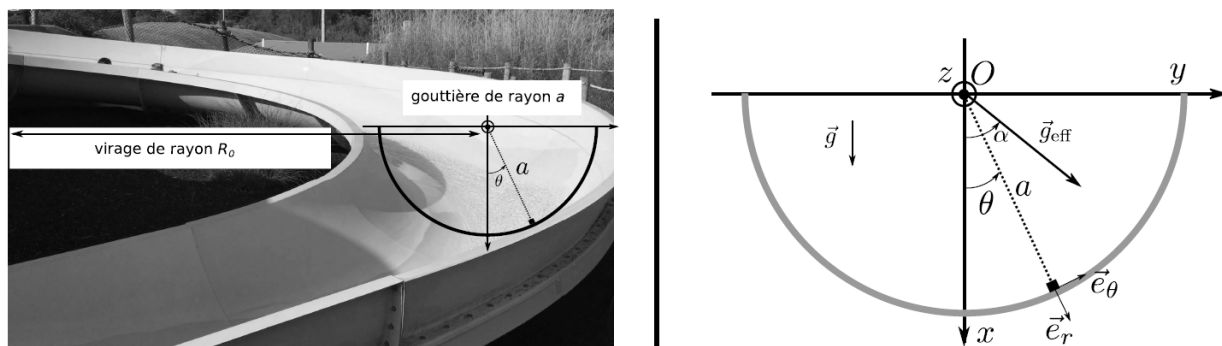


Figure 4. Gauche : photographie d'un virage. Droite : repère dans le plan de la gouttière.

- 14 - Montrer que la somme des forces qui s'exercent sur le passager s'écrit $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = m\vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N}$, avec \vec{g}_{eff} une pesanteur "effective" dont on donnera la norme en fonction de g , R_0 et v_0 .
- 15 - Donner également l'expression de l'angle α entre \vec{g}_{eff} et l'axe Ox , en fonction de g , R_0 et v_0 .

Par exemple, si $v_0 = 25 \text{ km/h}$ et $R_0 = 4 \text{ m}$, on obtient $\|\vec{g}_{\text{eff}}\| = 15,5 \text{ m/s}^2$ et $\alpha = 51^\circ$. On se place dans ce cas dans la suite.

- 16** - Le passager entre dans le virage avec $\theta(0) = 0$. En utilisant une analogie avec ce qui a été vu dans la sous partie I.2.1, indiquer entre quelles valeurs extrêmes va varier θ dans la suite du mouvement. Il n'est pas nécessaire de faire de calculs compliqués pour répondre à cette question.
Conclure alors sur le dimensionnement de la gouttière dans ce cas ci.

FIN