Correction - DS n°1bis (Centrale - Mines)

1 Accordeur de guitare (d'après Centrale TSI 2019)

A. Le signal

1. En appréciant le graphique, on peut proposer la moyenne : $\boxed{\langle u_e \rangle_t \simeq 10\,\text{mV}}$.

2. On peut repérer 2 périodes entre les dates 2 ms et 8 ms. La période est donc d'environ 3 ms ce qui correspond à une fréquence $\boxed{f_{co} = 330\,\text{Hz}}$.

3. Il s'agit de la corde de $\boxed{\text{Mi aigu}}$.

4. L'analyse spectrale de ce signal fera apparaître des harmoniques car le signal n'est $\boxed{\text{pas sinusoïdal}}$. Il y a d'autres composantes que le fondamental à 330 Hz. Quant à savoir si ces autres fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale, c'est beaucoup plus difficile d'être affirmatif mais il semble que ce soit le cas au premier abord.

B. Premier filtre

5. Par diviseur de tension, on obtient facilement $\underline{H}_1 = \frac{R_1}{R_1+\frac{1}{jC_1\omega}}$ On peut écrire cette fonction de transfert selon : $\boxed{\underline{H}_1 = \frac{1}{1+\frac{1}{jR_1C_1\omega}}}$.

6. Il s'agit d'un filtre passe-haut parce que $|\underline{H}_1|$ tend vers 0 en basse fréquence alors que si on travaille en haute fréquence, on trouve $\underline{H}_1 = 1$. La distinction haute et basse fréquence s'effectue par comparaison de ω avec la pulsation caractéristique de ce filtre $\boxed{\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}}$.

7. Si $\omega \ll \omega_1$ alors $\underline{H}_1 \simeq j\frac{\omega}{\omega_1}$, on obtient un gain qui évolue selon $G_{dB} = 20\log\omega - 20\log\omega_1$. On a une droite de pente +20 dB par décade. Pour la phase qui est l'argument de $\underline{H}_1$, on a $\frac{\pi}{2}$. Si l'on se place en haute fréquence, nous avons vu que $\underline{H}_1 = 1$, le gain est donc $G_{dB} = 0$ et la phase $\varphi = 0$. La représentation du diagramme de Bode est réalisé à la figure 1 où on a posé $x = \omega/\omega_1$.

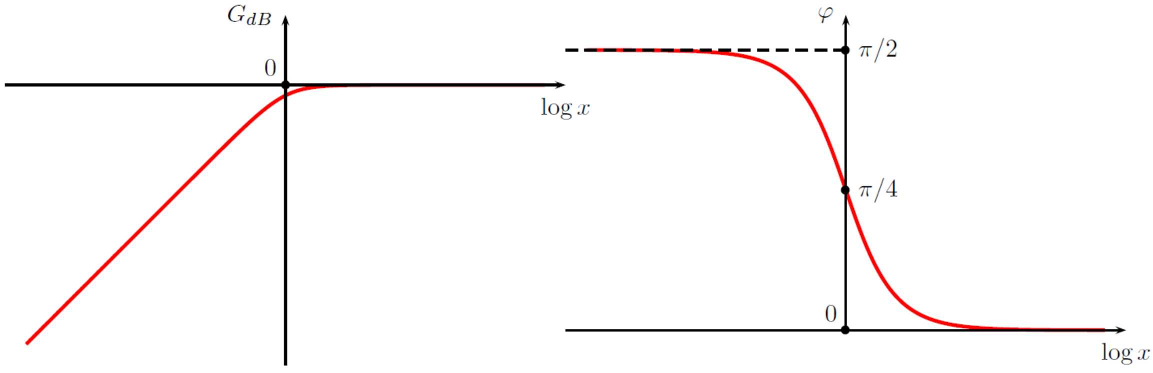


Figure 1 – Diagramme de Bode du filtre (F_a)

8. On trouve $\boxed{f_1 = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} = 15,9\,\text{Hz}}$. En effet, la fréquence de coupure correspond au moment où la fonction de transfert vérifie $|\underline{H}|(f_1) = \frac{H_{1,max}}{\sqrt{2}}$. Ce premier filtre a pour objectif de couper la composante continue du signal $u_e(t)$.

C. Deuxième filtre

9. On peut constater par le montage que $e = V_+$. Puisque l'amplificateur est en régime linéaire, on a $V_+ = V_-$. Or, par diviseur de tension, on voit que $\frac{V_-}{s} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}+\underline{Z}'}$. La fonction de transfert est alors $\boxed{\underline{H} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}}$. Si on utilise de simples résistances, on a une fonction de transfert $\underline{H} = 1 + \frac{R'}{R}$ réelle et indépendante de la fréquence.

Avec un tel filtre, on ne filtre rien du tout puisque le traitement des harmoniques sera le même pour chacune d'entre-elles. On amplifie le signal sans le déformer.

10. On a $\underline{Z}_{eq} = \frac{R_2 \frac{1}{jR_2C_2\omega}}{R_2 + \frac{1}{jR_2C_2\omega}}$. On peut simplifier en écrivant : $\boxed{\underline{Z}_{eq} = \frac{R_2}{1+jR_2C_2\omega}}$.

11. Avec le calcul général effectué avant, on trouve que $\boxed{\underline{H}_2 = 1 + \frac{R_2}{R_3}\frac{1}{1+jR_2C_2\omega}}$.

12. On obtient la forme demandée en posant $\boxed{G_0 = \frac{R_2}{R_3}}$ et $\boxed{\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}}$.

13. $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence peut s'approximer à $\boxed{1 + G_0}$ alors qu'en haute fréquence, on a $\boxed{\underline{H}_2 \simeq 1}$.

14. On trouve $\boxed{f_2 = \frac{1}{2\pi R_2C_2} = 498\,\text{Hz}}$ et $\boxed{G_0 = \frac{R_2}{R_3} = 113}$. Ce filtre renforce clairement les basses fréquences d'un facteur de l'ordre de 100, principalement en dessous de 500 Hz et donc en particulier le fondamental du signal de départ qui est à 330 Hz par rapport aux plus hautes fréquences où $|\underline{H}_2| = 1$.

D. Filtrage sélectif

15. Il s'agit d'un filtre passe-bande du second ordre car on peut apprécier les pentes de ±20 dB par décade en basse et en haute fréquence. La fréquence centrale est $\boxed{f_{ac} = 330\,\text{Hz}}$, valeur qui est tout sauf une surprise puisque l'on souhaitait travailler sur l'accordage de la corde de Mi aigu.

16. La bande-passante à −3 dB correspond à l'intervalle des fréquences qui assurent un module de la fonction de transfert compris entre sa valeur maximale H_{max} et cette même valeur divisée par racine de deux : $\frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \leq |H(f)| \leq H_{max}$. Comme le gain maximum est nul en décibels, cela veut dire que $H_{max} = 1$. À l'aide du graphique en échelle linéaire, on peut déterminer la bande passante comme constituée des fréquences comprises entre 320 Hz et 340 Hz. On a donc $\boxed{\Delta f = 20\,\text{Hz}}$. On peut démontrer que le facteur de qualité est relié à la bande-passante par $Q = \frac{f_{ac}}{\Delta f} = 16,5$. Cette valeur est déjà élevée pour un filtre. Le filtre passe-bande peut être qualifié de très sélectif.

17. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315\,\text{Hz}$, on peut voir que cela correspond à un gain de −6 dB. Cela signifie que l'amplitude du fondamental émis par la corde désaccordée est $\boxed{\text{divisé par 2}}$.

Analyse spectrale

18. Le spectre proposé présente une $\boxed{\text{composante continue de 10 mV}}$ que l'on repère à une fréquence nulle. Cela correspond à la moyenne que nous avions évaluée avant. Ensuite, en regardant bien le graphique, on peut constater que le fondamental est selon toute vraisemblance vers 330 Hz et qu'ensuite toutes les harmoniques sont situées à égale distance (en fréquence évidemment). D'ailleurs, l'harmonique de rang 3 est à 1 kHz, en divisant par 3 cette valeur on retrouve bien la fréquence que nous avions estimée pour le fondamental.

19. Le premier filtre est un passe-haut de fréquence $f_1 = 15,9\,\text{Hz}$, il va donc couper la composante continue en atténuant très peu les fréquences nettement supérieure à f_1 avec un fondamental à 330 Hz, on peut dire que l'harmonique est conservée en totalité. Le spectre correspondant à la tension u_1 est donc le spectre $\boxed{(a)}$.

20. Le filtre (F_b) va amplifier le fondamental à 330 Hz par un facteur de l'ordre de 100 comme nous l'avons dit avant puisque cette fréquence est inférieure à $f_2 = 498\,\text{Hz}$. On part d'une amplitude de 18 mV, on doit donc trouver une amplitude de 1 800 mV environ. C'est le spectre $\boxed{(d)}$ qui correspond à la tension $u_2(t)$.

21. Comme la bande passante $\Delta f = 20\,\text{Hz}$ du filtre passe-bande est inférieure à la distance qui sépare deux fréquences du signal (330 Hz), le filtre donnera soit rien soit un signal monochromatique si la fréquence du signal est dans la bande passante. Ici, en l'espèce, on aura un signal de fréquence 330 Hz et donc une $\boxed{\text{tension sinusoïdale}}$.

2 Filtrage d'un enregistrement (d'après Centrale MP 2015)

E) 1) Il faut utiliser un passe-bas pour enlever les fréquences inaudibles sinon, à cause de la numérisation et du repliement du spectre, elles donneraient un signal fantôme audible (= qui existe dans le signal numérisé mais pas dans celui de départ).

Il ne doit garder que les fréquences audibles donc inférieures à 20 kHz.

2) $f_{éch}$ doit être supérieure à $2 f_{max}$, donc à 40 kHz.

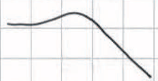
Un choix courant (et économique) est 44 kHz.

F) $\left|\frac{s_2}{s_1}\right|$ vaut 1,4 sur l'essai 1 à $f_1 = 1{,}0 \cdot 10^2$ Hz

2 sur l'essai 2 à $f_2 = 5{,}0$ kHz

7,2 sur l'essai 3 à $f_3 = 10$ kHz

$1{,}5 \cdot 10^{-2}$ sur l'essai 4 à $f_4 = 0{,}1$ MHz.

C'est donc un $\boxed{\text{passe-bas}}$ 

L'essai 3 correspond à un déphasage de 90° donc $\boxed{f_3 = f_0}$.

On réécrit $\boxed{H_{PB} = \dfrac{H_{0LP}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0}}}$ (effectivement $\arg(H_{PB}) = \frac{\pi}{2}$ pour $\omega = \omega_0$)

ou $H_{PB} = \dfrac{-H_{0LP} Q j \frac{\omega_0}{\omega}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

Quand $\omega \to 0$ $\left(\omega \ll \begin{matrix}\omega_p\\ \omega_0\\ \omega_c\end{matrix}\right)$ $H \to H_{0LP}$

Donc $\boxed{H_{0LP} = 1{,}4}$ (à f_1)

A $\omega = \omega_0$ ($f = f_0 = f_3$), $|H_{PB}| = \left|\dfrac{-H_{0LP}\,Qj}{1}\right| = H_{0LP}\,Q.$

$= 7{,}2.$

donc $\boxed{Q = \dfrac{|H_{PB}(f_0)|}{H_{0LP}} = 5{,}1}$.

Il ne reste qu'à calculer f_c (qui n'a pas la même définition qu'en cours)

$$f_c = \frac{f_0}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)+\sqrt{\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)^2+1}}}$$

$\boxed{f_c = 15\ \text{kHz}}$.

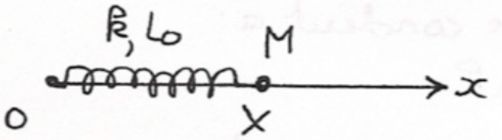
et $f_p = f_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} = 10\ \text{kHz}$.

3 MODÉLISATION D'UN OSCILLATEUR MÉCANIQUE

1. Étude énergétique d'un oscillateur

1) A partir du travail élémentaire : $\delta W_{\vec{F}} = \vec{F}.\vec{d\ell} = -dE_p$ (dans le cas où E_p existe), c'est à dire lorsque $\vec{F}$ est conservative.

Pour une force élastique : soit $X = OM$



$\vec{F_R} = -k(X - l_0)\vec{u_x} = -kx\vec{u_x}$

$\vec{d\ell} = dX\vec{u_x} = dx\vec{u_x}$

on posant $x = X - l_0$

donc :

$$\delta W_{\vec{F_R}} = -kx\,dx = -d\left(\frac{k}{2}x^2\right) \text{ d'où}$$

$$\boxed{E_p = \frac{k}{2}x^2 + C^{ste}}$$

2) Il y a conservation de l'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$, donc :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + E_0 + \alpha(y - y_0)^2 = C^{ste}$$

On dérive par rapport au temps :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = m\dot{y}\ddot{y} + \alpha\, 2(y - y_0)\dot{y}$$

d'où en simplifiant par $\dot{y}$: $\boxed{\ddot{y} + \frac{2\alpha}{m}y = \frac{2\alpha}{m}y_0}$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{2\alpha/m}$.

solution de l'équation homogène : $y_h = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

solution particulière : $y_p = y_0$

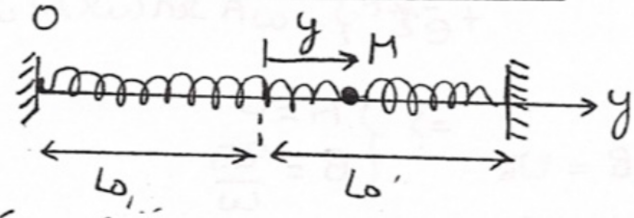
et donc

$$y = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + y_0$$

Ce sont des oscillations sinusoïdales autour de la valeur moyenne x_0 avec une période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}$$

3)



L'énergie potentielle totale est la somme des énergies potentielles de chaque ressort :

$$E_p = \frac{k}{2}(L_0 + y - L_0)^2 + \frac{k}{2}(L_0 - y - L_0)^2 = ky^2$$

Nous sommes donc ramenés à l'étude précédente avec $E_0 = 0$, $\alpha = k$ et $x_0 = 0$. Nous en déduisons :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \overset{AN}{=} 0{,}31\,s$$

4) Analyse dimensionnelle :

$$[f] = N = kg \cdot m \cdot s^{-2} \text{ et } [\beta] = \frac{[f]}{[mv]} = \frac{kg.m.s^{-2}}{kg\,m.s^{-1}}$$

donc

$[\beta] = s^{-1}$ β est homogène à l'inverse d'un temps.

5) En l'absence de frottement l'équation différentielle est celle du 2) : $m\ddot{y} + 2ky = 0$ ($x_0 = 0$). En présence de frottements

$$m\ddot{y} = -2ky - \beta m\dot{y} \iff \boxed{\ddot{y} + \beta\dot{y} + \frac{2k}{m}y = 0}$$

Pour avoir des oscillations, il faut que le régime soit pseudo-périodique donc que le discriminant Δ de l'équation caractéristique vérifie : $\Delta < 0$

$$\Delta = \beta^2 - 8\frac{k}{m} < 0 \implies \beta < \sqrt{8\frac{k}{m}} = \beta_{max}$$

6) Les racines de l'équation caractéristique sont donc :

$$r_\pm = -\frac{\beta}{2} \pm \frac{j}{2}\sqrt{8\frac{k}{m} - \beta^2}$$

d'où :

$$y(t) = e^{-\beta/2\, t}\{A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\}$$ en posant $\omega = \frac{\sqrt{4\frac{k}{m}-\beta^2}}{2}$ (partie imaginaire de la racine)

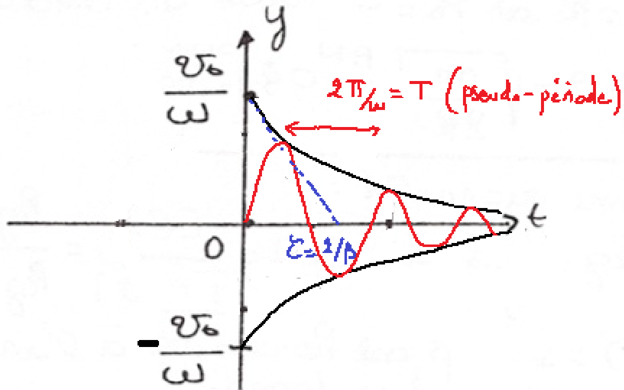
$$\dot{y}(t) = -\frac{\beta}{2}e^{-\frac{\beta}{2}t}\{A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\} + e^{-\frac{\beta}{2}t}\{-\omega A\sin(\omega t)+\omega B\cos(\omega t)\}$$

et donc :

$$\begin{cases} y(0) = A = 0 \\ \dot{y}(0) = -\frac{\beta}{2}A + \omega B = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{v_0}{\omega} \end{cases}$$

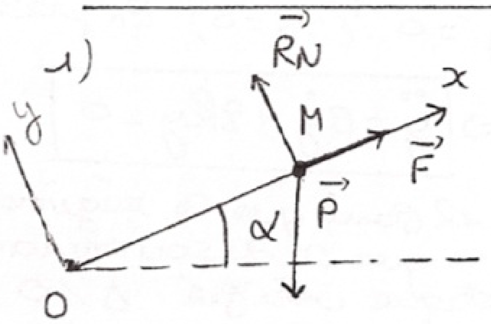
Finalement : $$\boxed{y(t) = e^{-\frac{\beta}{2}t}\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}$$ Régime pseudo-périodique

Allure de $y(t)$



2. Modélisation d'un dispositif expérimental

1)



BDF :

- Réaction normale $\vec{R_N}$ en l'absence de frottements $\vec{R_N} = R_N\,\vec{u_y}$
- Force électromagnétique $\vec{F} = F\,\vec{u_x}$
- Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\,\vec{u_y} - \sin\alpha\,\vec{u_x})$

2) À l'équilibre : $\vec{R_N} + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$

d'où, en projetant sur $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$

$$\begin{cases} k\left(\frac{x_0}{x_e}\right)^n - mg\sin\alpha = 0 \\ R_N - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

or, $\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{L^2+h^2}} \simeq \frac{h}{L}$ si $h \ll L$. Nous en déduisons

$$k\left(\frac{x_0}{x_e}\right)^n = mg\frac{h}{L} \iff x_e = \frac{x_0}{\left(\frac{mgh}{kL}\right)^{1/n}} = \underline{x_0\left(\frac{kL}{mgh}\right)^{1/n}}$$

3) Le passage au logarithme conduit à :

$$\ln\left(\frac{x_e}{x_0}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{kL}{mg}\right) - \frac{1}{n}\ln h$$

Si la loi est vérifiée la représentation de $\ln\left(\frac{x_e}{x_0}\right)$ en fonction de $\ln h$ est une droite de coefficient directeur $-\frac{1}{n}$. On remarque donc que cela est vérifié sur le graphique. On mesure :

$$-\frac{1}{n} = \frac{-2{,}19-(-2{,}81)}{-4{,}61-(-2{,}12)} = -0{,}24899 \iff \underline{n=4}$$

Une régression linéaire sur les valeurs du tableau donne une ordonnée à l'origine $b = -3{,}33$ avec

$$b = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{kL}{mg}\right) \iff \underline{k = \frac{mg}{L}e^{nb}} \overset{AN}{=} \underline{2{,}4.10^{-6}\ N}$$

4) On calcule le travail élémentaire de $\vec{F}$.

$$\delta W_{\vec{F}} = k\frac{x_0^n}{x^n}\vec{u}_x . dx\vec{u}_x = kx_0^n x^{-n} dx$$

et donc

$$= -d\left(\frac{kx_0^n x^{-n+1}}{n-1}\right)$$

$$\boxed{E_p^F = \frac{k}{n-1}\left(\frac{x_0}{x}\right)^n x + cste}$$

L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit :

$$E_p^{(pes)} = mgz = mgx\sin\alpha \simeq mgx\frac{h}{L}.$$

d'où

$$E_p(x) = \frac{k}{n-1}\left(\frac{x_0}{x}\right)^n x + mg\frac{h}{L}x$$

En éliminant m, g, k et L à l'aide de l'équation donnant la position d'équilibre :

$$\frac{mgh}{L} = k\left(\frac{x_0}{x_e}\right)^n$$

nous obtenons :

$$E_p(x) = \frac{k}{n-1}\left(\frac{x_0}{x}\right)^n x + k\left(\frac{x_0}{x_e}\right)^n x$$

---

5) x_e étant une position d'équilibre : $\frac{dE_p}{dx}(x_e) = 0$
Il reste à calculer la dérivée seconde

$$E_p(x) = \frac{k}{n-1} x_0^n x^{1-n} + k\left(\frac{x_0}{x_e}\right)^n x$$

$$\frac{dE_p}{dx} = -k x_0^n x^{-n} + k\left(\frac{x_0}{x_e}\right)^n$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = n k x_0^n x^{-n-1} \Rightarrow \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) = n k \frac{x_0^n}{x_e^{n+1}}$$

et donc $$E_p(x) = \frac{1}{2} n k \frac{x_0^n}{x_e^{n+1}} (x-x_e)^2 + E_p(x_e)$$

Par identification, nous obtenons donc :

$$K = n k \frac{x_0^n}{x_e^{n+1}}$$

---

6) L'expression de l'énergie potentielle obtenue est analogue à celle d'une force élastique dont la raideur vaut K.

7) On utilise le résultat de la question 2) de la partie 1. La période des oscillations est donnée par :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{n k x_0^n}}\, x_e^{\frac{n+1}{2}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{n k x_0^n}}\, x_0^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{kL}{mg}\right)^{\frac{n+1}{2n}} h^{-\frac{n+1}{2n}}$$

T est donc proportionnelle à $h^{-\frac{n+1}{2n}}$. En mesurant T pour différentes valeurs de h, on peut représenter $\ln T$ en fonction de $\ln h$:

$$\ln T = C^{te} - \frac{n+1}{2n} \ln h$$

On devrait obtenir une droite de pente $-\frac{n+1}{2n}$ ce qui permet de déterminer n.