DM n°4
pour le vendredi 13 octobre 2023

1 Étude de l'arsenic

L'arsenic est un élément dont il est admis qu'il fut isolé par Magnus au début du XIII^e siècle. Il est présent dans plusieurs minerais, notamment : l'orpiment (As_2S_3), le réalgar (As_4S_4) et le mispickel (FeAsS). L'importance de l'arsenic vient de son rôle physiologique : c'est un constituant systématique de la cellule vivante où il sert de bio-catalyseur. De nombreux composés de l'arsenic sont fortement toxiques. Néanmoins, la pharmacologie utilise de nombreux produits arsenicaux.

DONNÉES :

Tableau des valeurs du rayon atomique (unités pm, soit 10^{-12} m), de l'énergie de première ionisation (E.I.) et de l'électronégativité selon Pauling, pour les éléments suivants :

Elément	H	N	P	As	Sb	Cl	F
Rayon atomique (pm)		88	128	139	159		
E.I. (eV)		14,5	11	9,8	8,6		
Electronégativité	2,2	3,0	2,2	2,2	2,1	3,2	4

1. Rappeler les règles générales permettant d'établir la configuration électronique d'un atome dans l'état fondamental et les appliquer au atomes d'azote N ($Z = 7$), de phosphore P ($Z = 15$) et d'arsenic As ($Z = 33$). À quelle famille chimique appartient-il ? Combien ces trois atomes possèdent-ils d'électrons de valence ? Donner leur schéma de Lewis.
2. Dans quelle colonne du tableau périodique les trouve-t-on. A quelles périodes appartiennent-ils ?

   L'antimoine Sb se trouve dans la même colonne que N, P et As.

3. Définir l'énergie de première ionisation d'un élément. Compte tenu des données fournies dans le tableau : justifier l'évolution observée pour cette énergie de première ionisation et commenter l'évolution des rayons atomiques.
4. Comment évolue l'électronégativité des élément le long d'une période du tableau périodique ? Le long d'une colonne ? En quoi l'électronégativité d'un élément est-elle reliée à son caractère oxydant ou réducteur ?
5. L'arsenic As peut donner deux bromures $AsBr_3$ et $AsBr_5$. On donne pour Br : $Z = 35$. Représenter en les justifiant la formule de Lewis de chacun de ces deux bromures. Calculer les charges formelles. Peut-on obtenir les mêmes bromures avec N ou P ? Justifier.
6. L'arsenic est susceptible de former des ions arsénites AsO_3^{3-} et arséniates AsO_4^{3-}. Donner, en les justifiant, une représentation de Lewis de chacun de ces ions, sachant que chacun des atomes d'oxygène n'est lié qu'à l'atome d'arsenic.

2 Mécanique dans le référentiel terrestre

Données :

La Terre est assimilée à une boule homogène de centre O et de rayon $R_T = 6{,}38.10^3$ km.
Constante universelle de la gravitation : $G = 6{,}67.10^{-11}$ u.S.I.
Masse de la Terre : $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg

Le référentiel géocentrique $(\mathscr{R}_G)$ est supposé galiléen. On le considère comme le référentiel absolu et on le munit du repère absolu $\mathrm{R}_a = (OXYZ)$ et de la base canonique $(\overrightarrow{e_X}, \overrightarrow{e_Y}, \overrightarrow{e_Z})$.

Par rapport à $(\mathscr{R}_G)$, le référentiel terrestre $(\mathscr{R}_T)$ est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles SN qui coïncide avec OZ, fixe dans $(\mathscr{R}_G)$, avec une vitesse angulaire constante $\omega = 7{,}29.10^{-5}$ rad.s^{-1}.

On munit $(\mathscr{R}_T)$ du repère $\mathrm{R} = (Oxyz)$, dont la base orthonormale directe associée est $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_Z})$. Ce repère est en rotation par rapport à R_a, la rotation étant paramétrée par l'angle θ. La vitesse angulaire ω s'écrira donc $\omega = \dot{\theta}$ (**Figure 1**).

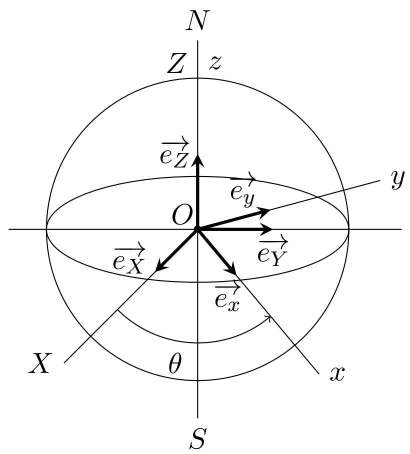

Figure 1

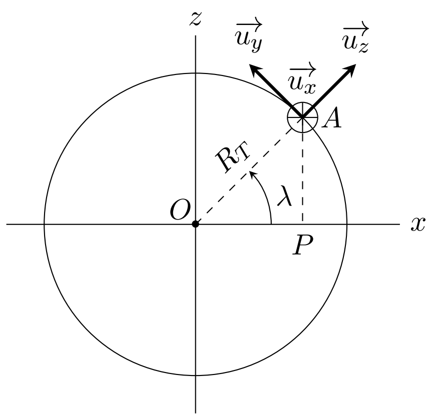

Figure 2

On considère un point A de la surface terrestre, fixe dans $(\mathscr{R}_T)$, situé dans le plan (Oxz) à la latitude λ (**Figure 2**) et on appelle P son projeté dans le plan de l'équateur. L'angle λ peut varier entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$: il est négatif dans l'hémisphère Sud et positif dans l'hémisphère Nord.

Dans tout le problème les calculs se feront dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ indiquée sur la **Figure 2**. On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans le référentiel terrestre $(\mathscr{R}_T)$. Ce point reste toujours au voisinage du point A et on pose :

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$$

Le projeté de M sur l'axe de rotation SN sera noté H.

Enfin, comme M reste toujours très proche de la surface terrestre, $OM \approx R_T$ et le champ de gravitation terrestre en M pourra donc s'écrire de façon approchée :

$$\overrightarrow{G}_T(M) = -\,g_0\,\overrightarrow{u_z} \text{ avec } g_0 = G\,\frac{M_T}{R_T^2}$$

I. Champ de pesanteur terrestre

1. Calculs préliminaires.
   a) Exprimer les trois vecteurs $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.
   b) À partir de la relation générale donnant l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ du point M, montrer que celle ci peut aussi se mettre sous la forme : $\vec{a}_e = -\,\omega^2\,\overrightarrow{HM}$.
   c) Expliquer pourquoi $\overrightarrow{v}_{M/\mathrm{R}} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$
2. Montrer que lorsque la seule force d'interaction que subit le point M est gravitationnelle, le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans le repère $\mathrm{R} = (Oxyz)$:

$$m\,\overrightarrow{a}_{M/\mathrm{R}} = m\overrightarrow{g} - 2m\,\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v}_{M/\mathrm{R}}$$

   où $\overrightarrow{g}$ est un vecteur que l'on explicitera en fonction de $g_0\,\overrightarrow{u_z}$, ω et $\overrightarrow{HM}$. Expliciter de même le vecteur $\overrightarrow{\omega}$

   Dans la suite, on ne considérera que des points très proches de la surface terrestre, de sorte à pouvoir confondre les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HA}$. La grandeur $\vec{g}$ représente l'accélération de la pesanteur *mesurée dans le référentiel terrestre, au voisinage du point A.*

3. Étude de $\vec{g}$

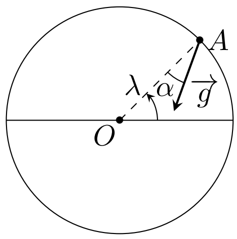

Figure 3

   a) Expliciter les composantes de $\vec{g}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ en fonction de g_0, ω, λ et R_T.
   b) Soit α l'angle entre $\overrightarrow{AO}$ et $\vec{g}$ (**Figure 3**). Déterminer $\tan\alpha$ en fonction de g_0, ω, λ et R_T. Application numérique : calculer α à la latitude $\lambda = 45°$ nord.

4. Donner l'expression de $\Delta g = g_{\text{pôle}} - g_{\text{équateur}}$, différence des normes de l'accélération de la pesanteur au pôle et à l'équateur. Calculer la valeur numérique de Δg. En réalité, on mesure $\Delta g = 52.10^{-3}$ m.s^{-2}. Proposer une raison pour expliquer l'écart trouvé.

   Compte tenu des valeurs numériques calculées, on admettra par la suite que les composantes de $\vec{g}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ sont $(0, 0, -\,g)$ où g est une constante de valeur g = 9,8 m.s^{-2}.

II. Pendule de Foucault

Un pendule de Foucault est un pendule simple constitué d'un fil inextensible de longueur L suspendu à un point B sur un axe Δ qui est la verticale locale du point A, de sorte que $\overrightarrow{AB} = L\,\overrightarrow{u_z}$. À l'autre bout du fil, on attache un petit objet M de masse m (**Figure 4**). *La longueur du fil est en réalité très légèrement inférieure à L afin que le point M ne touche jamais le sol.*

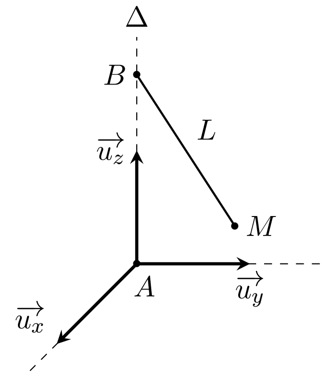

Figure 4

5. On note $\overrightarrow{T}$ la tension exercée par le fil sur le point M et T sa norme. Déterminer l'expression de $\overrightarrow{T}$ en fonction de T, du vecteur $\overrightarrow{MB}$ et de L.
6. a) Établir les trois équations différentielles auxquelles obéissent les trois coordonnées x, y et z. L'étude sera menée dans le référentiel terrestre ($\mathscr{R}_T$).

   Dans la suite du problème, on étudie les petites oscillations au voisinage de A, ce qui suppose que $z \approx 0$, $\dot{z} \approx 0$ et $\ddot{z} \approx 0$. On supposera en outre que $|\,2\omega\cos\lambda\,\dot{x}\,| \ll g$.

   b) Montrer que les équations différentielles vérifiées par x et y s'écrivent de façon approchée :
$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\sin\lambda\,\dot{y} + \dfrac{g}{L}\,x & = & 0 \\ \\ \ddot{y} + 2\omega\sin\lambda\,\dot{x} + \dfrac{g}{L}\,y & = & 0 \end{cases}$$
   On posera dorénavant $\omega_0^2 = g/L$ et $\Omega = \omega\sin\lambda$.

   c) Calculer les valeurs numériques de ω_0 et Ω pour un pendule situé à la latitude $\lambda = 45°$ Nord et avec $L = 15$ m.

7. Dans le but de résoudre ce système d'équations couplées, on définit la fonction complexe $u = x + iy$ (avec $i^2 = -1$). Déterminer l'équation différentielle du second ordre à laquelle obéit u. En déduire sa solution générale en introduisant deux constantes d'intégration complexes qu'on ne cherchera pas à déterminer pour le moment.

8. Afin d'interpréter plus facilement les solutions précédentes on effectue un changement de base. On introduit la base $(\overrightarrow{u_x}', \overrightarrow{u_y}', \overrightarrow{u_z})$ en rotation par rapport à la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ selon la **Figure 5**. Les vecteurs $\overrightarrow{u_x}'$ et $\overrightarrow{u_y}'$ tournent dans le sens des aiguilles d'une montre à la vitesse angulaire constante $\Omega = \omega\sin\lambda$. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ les deux bases sont confondues. On pose :
$$\overrightarrow{AM} = x'(t)\,\overrightarrow{u_x}' + y'(t)\,\overrightarrow{u_y}' + z(t)\,\overrightarrow{u}_z \quad \text{et} \quad u'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$$
   a) Montrer que $u(t) = u'(t)\,\exp(-i\Omega t)$.

   b) On suppose que la masse oscillante M est abandonnée sans vitesse initiale par rapport à R, dans la position M_0 de coordonnées $(x_0 > 0, y_0 = 0)$. Expliciter dans ce cas l'expression complète de $u'(t)$ et montrer que :
$$x'(t) = a\cos(\omega_1 t) \text{ et } y'(t) = b\sin(\omega_1 t)$$

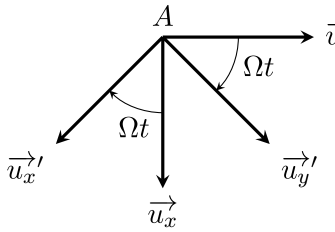

Figure 5

en déterminant les constantes a, b et ω_1.

c) Quelle est la nature de la trajectoire avec les coordonnées x' et y' ? Calculer numériquement le rapport b/a ainsi que l'écart relatif $|\omega_1 - \omega_0|/\omega_0$ à la latitude $\lambda = 45°$ nord, avec $L = 15$ m. Que peut-on en conclure ?

9. Les équations précédentes peuvent s'interpréter comme décrivant un pendule oscillant avec une période T_0 dans un plan (P) qui tourne autour de l'axe Δ avec une période $T_R = \dfrac{2\pi}{\Omega}$. Déterminer T_0 ainsi que la durée T_R d'une rotation complète de ce plan d'oscillations. Application numérique : calculer T_R en un lieu de latitude $\lambda = 45°$ Nord avec $L = 15$ m .

III. Déviation vers l'Est

On étudie maintenant le mouvement du point M lorsqu'il tombe en chute libre, sans vitesse initiale, à partir du point B défini au début de la section II.

10. Déterminer en fonction de g, ω et λ les trois équations différentielles auxquelles obéissent les trois coordonnées x, y et z du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. On raisonnera dans le référentiel terrestre non galiléen.

Comme ω est petite, il est possible d'étudier le phénomène « à l'ordre 1 en ω », c'est à dire en négligeant dans les équations tous les termes proportionnels à ω^2 ou à des puissances supérieures à 2.

11. Résoudre dans cette approximation les équations différentielles obtenues à la question précédente et montrer que :

$$x(t) = at^3 \quad y(t) = 0 \quad z(t) = bt^2 + L$$

où a et b sont deux constantes à expliciter en fonction de g, ω et λ.

12. En déduire que dans l'hémisphère Nord la particule tombe sur le sol en étant déviée d'une quantité x_1 vers l'Est. Calculer sa valeur numérique lorsque $L = 200$ m et $\lambda = 45°$. Commenter.

FIN