Corrigé du DM n°3

1 Étude d'un satellite

I. Lancement d'un satellite

1. En l'absence de forces non conservatives l'énergie mécanique E_m sera conservée au cours du mouvement, donc oui le mouvement sera conservatif. On aura :

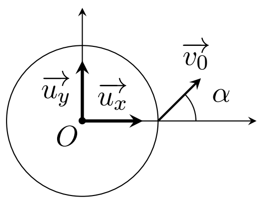
$$\boxed{E_m = E_m(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\,\frac{mM_T}{R_T} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR_T}$$

où :

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

désigne le champ de gravitation à la surface de la Terre.

2. Introduisons un repère d'espace $(O;\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})$ lié au référentiel terrestre (R_T).



À l'instant initial : $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM_0} \wedge m\,\overrightarrow{v_0}$, d'où :

$$\overrightarrow{L_O} = R_T\,\overrightarrow{u_x} \wedge\, mv_0\,\{\cos\alpha\,\overrightarrow{u_x} + \sin\alpha\,\overrightarrow{u_y}\} = mv_0R_T\sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}$$

et donc

$$\boxed{\|\overrightarrow{L_O}\| = mv_0R_T\sin\alpha}$$

Ce moment cinétique est conservé au cours du mouvement puisque :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_g} = \overrightarrow{0}$$

3. On a donc :

$$\forall\, t,\ \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{L_O} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{L_O}$$

Ainsi les vecteurs position et vitesse restent à tout instant perpendiculaires à un vecteur constant : le mouvement est donc plan, dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{L_O}$ et qui contient le point O.

Il s'agit aussi du plan défini par les deux vecteurs $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{v_0}$.

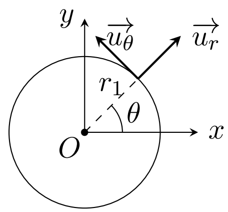
4. Si $v_0 < \sqrt{2gR_T}$, alors :

$$E_m < 0$$

et la trajectoire est forcément une ellipse (ou bien à la limite un cercle).

II. Satellite en orbite circulaire

1. a) La trajectoire circulaire est représentée ci-dessous, ce qui permet d'introduire quelques notations :



La vitesse et l'accélération pour un mouvement circulaire s'écrivent dans la base polaire :

$$\overrightarrow{v} = r_1\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a} = -\,r_1\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} + r_1\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

La seule force agissante étant celle de gravitation, nous obtenons en projetant sur la base polaire :

$$\begin{cases} -m\,r_1\dot\theta^2 & = -G\dfrac{mM_T}{r_1^2} \\ \\ m\,r_1\ddot\theta & = 0 \end{cases}$$

d'où on déduit :

$$\boxed{\omega = \dot\theta = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1^3}}}$$

et donc :

$$\boxed{v_1 = r_1\dot\theta = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}}}$$

b) La vitesse angulaire $\dot\theta$ du mouvement circulaire étant une constante, elle ne peut être égale qu'à $2\pi/T$ et donc :

$$\boxed{\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1^3}} \iff T = 2\pi\sqrt{\frac{r_1^3}{GM_T}}}$$

A.N. $r_1 = 6800$ km ; $T = 5{,}6.10^3$ s $=$ 1h 33 min

2. a) Non car il n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel géocentrique supposé galiléen.

b) Il est soumis à :

- La force gravitationnelle :

$$\overrightarrow{F_g} = -\,G\,m_0M_T\,\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} = -\,G\,m_0M_T\,\frac{(r_1+x)\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y}}{[\,(r_1+x)^2+y^2\,]^{3/2}}$$

- La force d'inertie d'entraînement (cas d'une rotation uniforme) :

$$\overrightarrow{F_{ie}} = m_0\,\omega^2\,\overrightarrow{OM} = m_0\omega^2\,(r_1+x)\,\overrightarrow{e_x} + m_0\omega^2\,y\,\overrightarrow{e_y}$$

avec $\omega^2 = \dfrac{GM_T}{r_1^3}$.

- La force d'inertie complémentaire :

$$\overrightarrow{F_{ic}} = -\,2m_0\,\overrightarrow{\omega}\wedge\vec{v}_{M/R_S} = -\,2m_0\,\omega\,(\,\dot x\,\overrightarrow{e_y} - \dot y\,\overrightarrow{e_x})$$

3. a) On développe le dénominateur de $\overrightarrow{F_g}$; il se met sous la forme :

$$\begin{aligned}\left[r_1^2+2r_1x+x^2+y^2\right]^{-3/2} &= \frac{1}{r_1^3}\left[1+2\,\frac{x}{r_1}+\frac{x^2+y^2}{r_1^2}\right]^{-3/2} \\ &= \frac{1}{r_1^3}\left(1-3\,\frac{x}{r_1}-\frac{3(x^2+y^2)}{2\,r_1^2}+...\right) \\ &\approx \frac{1}{r_1^3}\left(1-3\,\frac{x}{r_1}\right)\end{aligned}$$

en ne gardant que le terme d'ordre le plus bas non nul en x/r_1. On a donc (toujours à l'ordre le plus bas non nul en x/r_1 et en y/r_1) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_g} &= -m_0\,\frac{GM_T}{r_1^2}\left(1-3\frac{x}{r_1}\right)\left[\left(1+\frac{x}{r_1}\right)\overrightarrow{e_x}+\frac{y}{r_1}\,\overrightarrow{e_y}\right] \\ &= -m_0\,\frac{GM_T}{r_1^2}\left[\overrightarrow{e_x}-2\frac{x}{r_1}\,\overrightarrow{e_x}+\frac{y}{r_1}\,\overrightarrow{e_y}\right] \\ &= -\,m_0\omega^2\,[\,r_1\,\overrightarrow{e_x}-2x\,\overrightarrow{e_x}+y\,\overrightarrow{e_y}\,]\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{F_g}+\overrightarrow{F_{ie}} = 3m_0\omega^2\,x\,\overrightarrow{e_x}}$$

b) On applique alors le principe fondamental de la dynamique (PFD) au spationaute dans R_S. L'accélération étant $\overrightarrow{a}_{M/R_S} = \ddot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{e_y}$ on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 3\omega^2\,x + 2\omega\,\dot{y} \\ \\ \ddot{y} = -2\omega\,\dot{x} \end{cases}$$

d'où $\boxed{\Omega^2 = 3\omega^2}$.

4. a) On intègre la seconde équation pour trouver $\dot{y} = -2\omega\,x + C$ où C est une constante d'intégration. À $t = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ et $x(0) = 0$ et donc $C = 0$. On substitue ensuite $\dot{y}$ dans la première équation :

$$\ddot{x} = 3\omega^2\,x - 4\omega^2\,x = -\omega^2\,x \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{x} + \omega^2\,x = 0}$$

b) On en déduit : $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Les conditions initiales donnent $A = 0$ et $\omega B = -v_0$. On a donc :

$$\boxed{x(t) = -\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)} \quad \text{et} \quad \dot{y} = -2\omega\,x = 2v_0\,\sin(\omega t)$$

d'où :

$$\boxed{y(t) = \frac{2v_0}{\omega}\left[\,1 - \cos(\omega t)\,\right]}$$

On remarque alors que :

$$\frac{x^2}{\omega^2/v_0^2} + \frac{(y - 2v_0/\omega)^2}{2\omega^2/v_0^2} = 1$$

ce qui est l'équation d'une ellipse dont le centre de symétrie est le point $S(0, 2v_0/\omega)$.

c) Le spationaute revient à sa position initiale à l'instant t_1 tel que $x(t_1) = 0$ et $y(t_1) = 0$. On remarque que $\omega t_1 = 2\pi$, d'où :

$$\boxed{t_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r_1^3}{GM_T}} = T}$$

où T est la période de révolution complète du satellite autour de la Terre, calculée à la question 1.b)

2 Substitution sur le bromoéthane

On étudie, à 25°C, l'action d'une solution de soude diluée sur le bromoéthane ; la réaction totale a pour équation :

$$\mathrm{CH_3CH_2Br + OH^-} \longrightarrow \mathrm{CH_3CH_2OH + Br^-}$$

1. (a) Pour une réaction d'ordre 1 par rapport à chacun des réactifs, on peut écrire :

$$v = k\,[\mathrm{CH_3CH_2Br}]\,[\mathrm{OH^-}]$$

où k est la constante de vitesse.

Comme les coefficients stœchiométriques des deux réactifs sont égaux et que leurs concentrations initiales sont égales, nous avons à tout instant $t > 0$:

$$[\mathrm{CH_3CH_2Br}] = [\mathrm{OH^-}]$$

et donc :

$$v = -\frac{\mathrm{d}[\mathrm{OH^-}]}{\mathrm{d}t} = k\,[\mathrm{OH^-}]^2$$

ce qui est une équation différentielle à variables séparables. Le temps de demi-réaction est celui pour lequel $[OH^-](\tau_{1/2}) = C_0/2$, ce qui conduit à :

$$\int_{C_0}^{C_0/2} \frac{d[OH^-]}{[OH^-]^2} = -k \int_0^{\tau_{1/2}} dt = -\,k\tau_{1/2}$$

et donc :

$$\boxed{k\tau_{1/2} = \frac{1}{C_0}}$$

Pour montrer que cette loi est vérifiée, il faut montrer que $1/C_0$ est une fonction linéaire de $\tau_{1/2}$. Une régression linéaire sur les couples $(\tau_{1/2}, 1/C_0)$ donne un coefficient de corrélation $r = 0{,}999984 > 0{,}99$, ce qui confirme la loi.

(b) k est la pente de la droite obtenue par la régression linéaire précédente. On trouve alors :

$$\boxed{k = 9{,}1.10^{-2}\,\text{L.mol}^{-1}.\text{min}^{-1} = 1{,}5.10^{-3}\,\text{L.mol}^{-1}.\text{s}^{-1}}$$

2. D'après la loi d'Ahrrénius :

$$k(T) = A\exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$$

En posant $T_1 = 298$ K et $T_2 = 313$ K (températures en K), nous obtenons :

$$\frac{k(T_2)}{k(T_1)} = \frac{\exp(-E_a/RT_2)}{\exp(-E_a/RT_1)} = \exp\left(\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right)$$

et donc :

$$k(T_2) = k(T_1)\,\exp\left(\frac{E_a}{R}\frac{T_2 - T_1}{T_1T_2}\right) \overset{\text{AN}}{=} 5{,}1.10^{-1}\,\text{L.mol}^{-1}.\text{min}^{-1}$$

d'où on tire que :

$$\tau_{1/2} = \frac{1}{k(T_2)C_0} \overset{\text{AN}}{=} 39 \text{ min}$$

L'élévation de température a donc fortement augmenté la vitesse de réaction.

3. On a maintenant :

$$[EtBr] = a\,;\ [OH^-] = b$$

(a) À l'instant $t > 0$ les concentrations des deux réactifs déviennet :

$$[EtBr] = a - x \quad \text{et} \quad [OH^-] = b - x$$

et

$$v = -\frac{d[OH^-]}{dt} = k\,[EtBr]\,[OH^-] \iff \frac{dx}{dt} = k\,(a-x)(b-x)$$

ce qui est encore une équation différentielle à variables séparables.

(b) On obtient donc :

$$\int_0^x \frac{dx'}{(a-x')(b-x')} = k \in_0^t dt' = k\,t$$

d'où :

$$\frac{1}{b-a}\left[\int_0^x \frac{dx'}{a-x'} - \int_0^x \frac{dx'}{b-x'}\right] = k\,t$$

et donc :

$$\frac{1}{b-a}\left[-\ln(a-x) + \ln(a) + \ln(b-x) - \ln(b)\right] = k\,t$$

soit finalement :

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{(b-x)\,a}{(a-x)\,b}\right) = k\,t}$$

(c) Le temps de demi-réaction correspond à la disparition du réactif le moins concentré, c'est à dire EtBr puisque $a < b$:

$$[\mathrm{EtBr}](\tau_{1/2}) = a/2 \iff x(\tau_{1/2}) = a/2$$

ce qui entraîne :

$$\boxed{k\tau_{1/2} = \frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{2b-a}{b}\right)}$$

A.N. à 25°C : $\tau_{1/2} = 82$ min