Correction du DM n°4. Partie physique.

2 Mécanique dans le référentiel terrestre

1. Calculs préliminaires

   a) On a manifestement :

$$\boxed{\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{e_y} \;\; ; \;\; \overrightarrow{u_y} = -\sin\lambda\,\overrightarrow{e_x} + \cos\lambda\,\overrightarrow{e_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_z} = \cos\lambda\,\overrightarrow{e_x} + \sin\lambda\,\overrightarrow{e_z}}$$

   b) Le vecteur rotation du repère R par rapport au repère R_a est $\overrightarrow{\omega}(R/R_a) = \omega\,\overrightarrow{e_z}$. Comme cette rotation est uniforme, l'accélération d'entraînement est :

$$\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{\omega}(R/R_a) \wedge \left(\overrightarrow{\omega}(R/R_a) \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

   Le reste est dans le cours.

   c) Le point A est fixe dans le repère R avec $\overrightarrow{OA} = R_T\cos\lambda\,\overrightarrow{e_x} + R_T\sin\lambda\,\overrightarrow{e_z}$. Il en va de même des vecteurs $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$. On a donc :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t}\right)_R = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_x}}{\mathrm{d}t}\right)_R = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_y}}{\mathrm{d}t}\right)_R = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_z}}{\mathrm{d}t}\right)_R = \overrightarrow{0}$$

   Il en résulte que :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_R = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t}\right)_R = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y}$$

2. Il faut appliquer le principe fondamental de la dynamique au point matériel M dans le référentiel terrestre ($\mathscr{R}_T$) non galiléen, en tenant compte des forces d'inertie.

$$m\,\vec{a}_{M/R} = -\,mg_0\,\vec{u}_z + m\,\omega^2\,\overrightarrow{HM} - 2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R}$$

   En regroupant les deux premiers termes, on peut introduire le vecteur :

$$\boxed{\vec{g} = -\,g_0\,\vec{u}_z + \omega^2\,\overrightarrow{HM}}$$

   ce qui donne le résultat.

3. a) On projette : $\overrightarrow{HA} = R\cos(\lambda)[\,\cos(\lambda)\,\vec{u}_z - \sin(\lambda)\,\vec{u}_y\,]$ d'où le résultat :

$$\begin{cases} g_x &= 0 \\ g_y &= -\,\omega^2 R\cos(\lambda)\,\sin(\lambda) \\ g_z &= -\,g_0 + \omega^2 R\cos^2(\lambda) \end{cases}$$

   b)

$$\boxed{\tan\alpha = \left|\frac{g_y}{g_z}\right| = \frac{\omega^2 R\cos(\lambda)\,\sin(\lambda)}{g_0 - \omega^2 R\cos^2(\lambda)}}$$

   Application numérique : $g_0 = 9{,}799$ m.s^{-2}. Pour $\lambda = 45°$, on trouve : $\alpha = 0{,}1°$, ce qui est négligeable.

4. Au Pôle, $\lambda = \pi/2$ et $g_{\text{pôle}} = g_0 \approx 9{,}799$ m.s^{-2}. À l'équateur, $\lambda = 0$ d'où : $g_{\text{équateur}} = g_0 - \omega^2 R = 9{,}765$ m.s^{-2}. La différence est :

$$\boxed{\Delta g = \omega^2\,R = 34.10^{-3}\ \text{m.s}^{-2}}$$

   La différence observée avec la valeur réelle est due à la non-rotondité de la Terre (aplatissement aux Pôles).

3 Pendule de Foucault

5. $\overrightarrow{T} = T\,\vec{u}_{MB}$ où $\vec{u}_{MB}$ est le vecteur unitaire de $\overrightarrow{MB}$. En notant que : $\|\,\overrightarrow{MB}\,\| = L$, nous obtenons :

$$\boxed{\overrightarrow{T} = T\,\frac{\overrightarrow{MB}}{L}}$$

6. a) Dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ le vecteur vitesse de M par rapport au repère R s'écrit :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y + \dot{z}\,\vec{u}_z$$

d'où :

$$\overrightarrow{F_{ic}} = -\,2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R} = -\,2m\,\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

donc

$$\overrightarrow{F_{ic}} = -\,2m\,\omega \begin{pmatrix} \dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda \\ \dot{x}\sin\lambda \\ -\,\dot{x}\cos\lambda \end{pmatrix}$$

En projetant le principe fondamental de la dynamique sur les vecteurs de base, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m\,\ddot{x} & = & -\,T\,\dfrac{x}{L} - 2m\,\omega\,(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda) \\ m\,\ddot{y} & = & -\,T\,\dfrac{y}{L} - 2m\,\omega\,\dot{x}\sin\lambda \\ m\,\ddot{z} & = & -\,mg + T\,\dfrac{L-z}{L} + 2m\,\omega\,\dot{x}\cos\lambda \end{array} \right.$$

b) En négligeant ces termes, la troisième équation devient : $T \approx mg$, ce qui donne bien les deux équations de l'énoncé (obtenue en négligeant $2m\,\omega\dot{z}\cos\lambda$ dans la première équation).

c) $\omega_0 = 0{,}81$ rad.s^{-1} et $\Omega = 5{,}2\times10^{-5}$ rad.s^{-1}

7. Avec $u = x + iy$ nous aboutissons à :

$$\boxed{\ddot{u} + 2i\,\Omega\,\dot{u} + \omega_0^2\,u = 0}$$

Le discriminant de l'équation caractéristique vaut : $\Delta = -\,4\Omega^2 - 4\omega_0^2 < 0$. Il y a donc deux racines complexes :

$$r_\pm = -i\Omega \pm i\,\sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2}$$

d'où :

$$u(t) = \exp(-i\,\Omega t)\,\left[\,A\exp\left(i\,\sqrt{\Omega^2+\omega_0^2}\;t\right) + B\,\exp\left(-\,i\,\sqrt{\Omega^2+\omega_0^2}\;t\right)\,\right]$$

Remarque : comme $\Omega << \omega_0$, on peut se contenter d'expressions approchées, qui s'écrivent :

$$r_+ = i\,(\omega_0 - \Omega) \quad \text{et} \quad r_- = -\,i\,(\omega_0 + \Omega)$$

d'où, finalement :

$$\boxed{u(t) = \exp(-i\,\Omega t)\;[\,A\exp\,(i\,\omega_0\,t) + B\,\exp\,(-\,i\,\omega_0\,t)\,]}$$

8. a) On voit que :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AM} & = & x'\,\vec{u}_{x'} + y'\,\vec{u}_{y'} \\ & = & x'\,[\,\cos(\Omega t)\,\vec{u}_x - \sin(\Omega t)\,\vec{u}_y\,] + y'\,[\,\sin(\Omega t)\,\vec{u}_x + \cos(\Omega t)\,\vec{u}_y\,] \\ & = & [\,x'\,\cos(\Omega t) + y'\,\sin(\Omega t)\,]\,\vec{u}_x + [\,-\,x'\,\sin(\Omega t) + y'\,\cos(\Omega t)\,]\,\vec{u}_y \end{array}$$

D'autre part, comme $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y$ et que la décomposition d'un vecteur sur une base est unique, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x'\,\cos(\Omega t) + y'\,\sin(\Omega t) \\ y & = & -\,x'\,\sin(\Omega t) + y'\,\cos(\Omega t) \end{array} \right.$$

d'où :

$$\begin{array}{rcl} u = x + iy & = & x'\,[\,\cos(\Omega t) - i\sin(\Omega t)\,] + iy'\,[\,\cos(\Omega t) - i\sin(\Omega t)\,] \\ & = & (x' + iy')\exp(-i\Omega t) \\ & = & u'(t)\exp(-i\Omega t) \end{array}$$

b) À l'instant $t = 0$: $u(0) = x_0 = A + B$ et $\dot{u}(0) = (\omega_0 - \Omega)A - (\omega_0 + \Omega)B = 0$. Nous obtenons donc :

$$A = x_0 \, \frac{\omega_0 + \Omega}{2\omega_0} \quad \text{et} \quad B = x_0 \, \frac{\omega_0 - \Omega}{2\omega_0}$$

et donc :

$$u(t) = x_0 \, \exp(-i\,\Omega t) \, \left[\frac{\omega_0 + \Omega}{2\omega_0} \, \exp\left(i\,\omega_0\, t\right) + \frac{\omega_0 - \Omega}{2\omega_0} \, \exp\left(-\,i\,\omega_0\, t\right) \right]$$

En tenant compte de la relation $u(t) = u'(t)\exp(-i\,\Omega t)$, nous obtenons :

$$\boxed{u'(t) = x_0 \, \left[\frac{\omega_0 + \Omega}{2\omega_0} \, \exp\left(i\,\omega_0\, t\right) + \frac{\omega_0 - \Omega}{2\omega_0} \, \exp\left(-\,i\,\omega_0\, t\right) \right]}$$

On en déduit que :

$$\boxed{x'(t) = \mathrm{Re}\ u'(t) = x_0 \, \cos(\omega_0 t)}$$

et

$$\boxed{y'(t) = \mathrm{Im}\ u'(t) = x_0 \, \frac{\Omega}{\omega_0} \, \sin(\omega_0 t)}$$

c) L'élimination du temps dans les équations horaires conduit à :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

ce qui est l'équation d'une *ellipse* dont la demi-longueur du grand axe est a et celle du petit axe est b. Comme $b/a = \Omega/\omega_0 = 6{,}4 \times 10^{-5}$. On remarque donc que cette ellipse est quasiment réduite à un segment de droite.

En pratique, le pendule oscille quasiment uniquement selon x' et nous aurons :

$$x'(t) = x_0 \, \cos(\omega_0 t) \approx x_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad y'(t) \approx 0$$

D'autre part, la pulsation des oscillations est, sans aucune approximation selon la question 7., $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}$, d'où :

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} - \omega_0}{\omega_0} = \ 2{,}1 \times 10^{-9} \ \text{rad.s}^{-1}$$

L'écart n'est donc pas mesurable et $\omega_1 = \omega_0$.

9. Il vient immédiatement :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{et} \quad T_R = \frac{2\pi}{\Omega}}$$

Application numérique : $T_0 = 7{,}8$ s et $T_R = 1{,}21 \times 10^5$ s $\approx$ 33h 30 min.

4 Déviation vers l'Est

10. Il suffit de reprendre les équations obtenues à la question 6. a), sans la tension du fil, à savoir, après simplification par la masse m :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \ddot{x} & = & -\,2\,\omega\,(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda) \\ \\ \ddot{y} & = & -\,2\,\omega\,\dot{x}\sin\lambda \\ \\ \ddot{z} & = & -\,g + 2\,\omega\,\dot{x}\cos\lambda \end{array} \right.$$

11. Une première intégration de ces équations donne, compte-tenu de la vitesse initiale nulle :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{x} & = & -\,2\,\omega\,(z\cos\lambda - y\sin\lambda) + 2\,\omega L\cos\lambda \\ \\ \dot{y} & = & -\,2\,\omega\,x\sin\lambda \\ \\ \dot{z} & = & -\,gt + 2\,\omega\,x\cos\lambda \end{array} \right.$$

En reportant ces expressions dans la première série d'équations de la question 10. et en négligeant tous les termes en ω^2, il vient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot{x} & = & 2\,\omega\, gt\cos\lambda \\ \\ \ddot{y} & = & 0 \\ \\ \ddot{z} & = & -\,g \end{array}\right.$$

Compte-tenu des conditions initiales, ces équations s'intègrent en :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{\omega g}{3}\cos\lambda\, t^3 \\ \\ y & = & 0 \\ \\ z & = & -\dfrac{g}{2}\,t^2 + L \end{array}\right.}$$

12. La particule arrive sur le sol à l'instant t_1 tel que $z(t_1) = 0$, ce qui donne :

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}} \quad\Longrightarrow\quad x(t_1) = \frac{2L\omega}{3}\sqrt{\frac{2L}{g}}\cos\lambda}$$

Application numérique : $x(t_1) = 4{,}4$ cm. C'est une déviation extrêmement faible en regard de la hauteur de chute. La mesurer nécessite donc des conditions expérimentales très rigoureuses et très précises, en évitant toutes les perturbations comme le vent, ou la résistance de l'air, ou encore des conditions initiales où la vitesse ne serait pas rigoureusement nulle.