DM n°6
Pour le vendredi 17 octobre 2023

I. Hexapôle électrostatique

On étudie la possibilité de guider le mouvement de molécules polaires avec un système électrostatique formé de six électrodes cylindriques et parallèles $\{C_i,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ 6\}$ disposées aux sommets d'un hexagone régulier auquel elles sont orthogonales (figure 1).

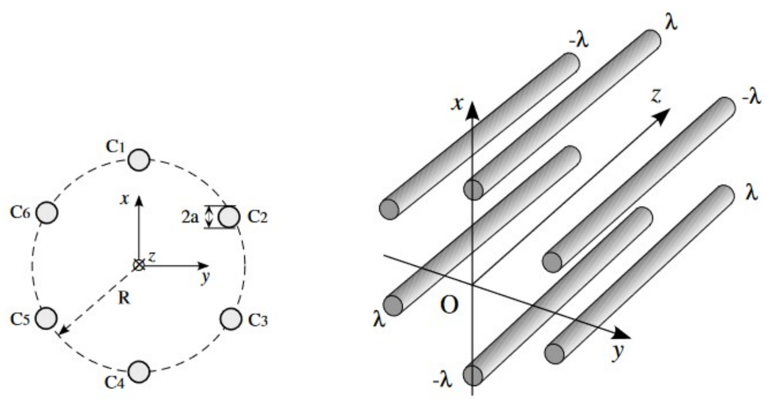


Figure 1

;

Leur rayon a est très inférieur au côté R de l'hexagone, $a \ll R$. Elles portent des densités linéiques de charge égales alternativement à λ ($\lambda > 0$) pour les électrodes impaires et $-\lambda$ pour les paires ; on considèrera que ces charges sont fixes et uniformément réparties. On négligera les effets d'extrémités, l'ensemble pouvant être considéré comme invariant par translation selon l'axe central Oz du système. On utilisera les coordonnées cylindriques : un point M sera repéré par (r, θ, z) avec comme base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_r},\ \overrightarrow{e_\theta},\ \overrightarrow{e_z})$.

1. Analyse des symétries

a) Quelles conclusions sur le champ $\overrightarrow{E}(M)$ et le potentiel électrostatique $V(M)$ tire-t-on de l'invariance par translation du système ?

b) Considérer la symétrie par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe Oz. Quelle propriété du champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$ en déduit-on ?

c) Même question pour l'un des trois plans passant par l'axe central Oz et les axes de deux électrodes opposées.

d) Montrer que les trois plans passant par l'axe et à égale distance des électrodes sont équipotentiels.

e) Quelle est la période angulaire d'invariance du système par rotation autour de l'axe Oz ? Que peut-on en déduire sur les composantes de $\overrightarrow{E}(M)$ et sur la base cylindrique $(\overrightarrow{e_r},\ \overrightarrow{e_\theta},\ \overrightarrow{e_z})$ et sur $V(M)$?

2. Soit une électrode de densité linéique de charge λ. Déterminer le champ électrostatique créé par cette électrode en un point M à l'aide de la distance D de ce point à son axe ($D > a$).

En déduire une expression du potentiel électrostatique correspondant.

3. On considère maintenant l'ensemble des électrodes du système. Montrer que, en le choisissant nul sur l'axe central, le potentiel électrostatique en un point M est donné par l'expression :

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5}\right)$$

où D_i désigne la distance de P à l'axe de l'électrode C_i.

4. Pour expliciter le potentiel en fonction des coordonnées de M, il est commode de considérer le plan xOy comme plan de représentation des nombres complexes. Le point M y est repéré par

$\underline{Z} = x+iy = r\exp(i\theta)$, les axes des électrodes impaires le sont par (R, jR, j^2R) et ceux des électrodes paires par $(-R, -jR, -j^2R)$, avec $j = \exp(i2\pi/3)$ racine cubique de l'unité. Montrer que :

$$\frac{D_2D_4D_6}{D_1D_3D_5} = \left|\frac{R^3+\underline{Z}^3}{R^3-\underline{Z}^3}\right|$$

5. On s'intéresse à la partie centrale $r \ll R$. Montrer que le potentiel électrostatique y est donné par $V(r,\theta,z) \approx \dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3\cos(3\theta)$. Cette expression respecte-t-elle les symétries étudiées en question 1. ?

6. Déterminer les potentiels V_0 des électrodes impaires (potentiel à la surface de chaque électrode) dans l'hypothèse $a \ll R$ en fonction de R, a et λ. Quel est celui des électrodes paires ?

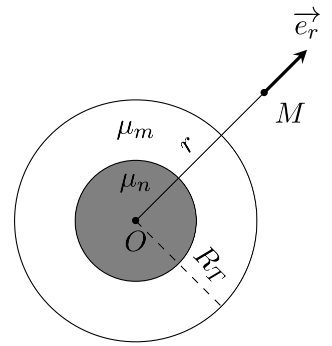
7. On considère le système comme un condensateur, les trois électrodes impaires formant l'une des armatures, les trois paires l'autre. Déterminer la capacité par unité de longueur correspondante C.

Montrer que le potentiel électrostatique dans la partie centrale de l'hexapôle s'exprime simplement en fonction de cette capacité linéique et de la tension V_0.

8. Application numérique. Calculer la capacité électrostatique par unité de longueur d'un hexapôle ayant $R = 2.5$ cm et $a = 2.5$ mm.

II. Champ de gravitation créé par la Terre

Assimilons la Terre à une planète sphérique de rayon $R_T = 6\,378$ km, de centre O et de masse totale $m_T = 5{,}97.10^{24}$ kg. On modélise la structure interne de la Terre par deux couches concentriques : un noyau de rayon R_n, de masse volumique uniforme μ_n recouvert d'un manteau de masse volumique uniforme $\mu_m = 4\,361$ kg.m^{-3}.



Donnée numérique :

Constante universelle de la gravitation : $G = 6{,}67.10^{-11}$ u.S.I.

1. Énoncer le théorème de Gauss gravitationnel en définissant tous les termes utilisés.

Un point M sera repéré par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ) et on introduira la base sphérique locale $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$. On note $\vec{g}(M)$ le champ de gravitation créé par la Terre en M et $m(r)$ la masse contenue à l'intérieur de la sphère de centre O et de rayon r.

2. Montrer que $\vec{g}(M) = g(r)\,\overrightarrow{e_r}$.

3. Donner l'expression de $g(r)$ en fonction de G, r et $m(r)$.

4. Expliciter $m(r)$ en fonction de r. En déduire le champ de gravitation $\vec{g}(M)$ à l'extérieur de la Terre ($r > R_T$).

5. Le noyau terrestre a un rayon $R_n = 3\,480$ km et une masse de $m_n = 2{,}0.10^{24}$ kg.

a) Quelle est la masse volumique μ_n du noyau ?

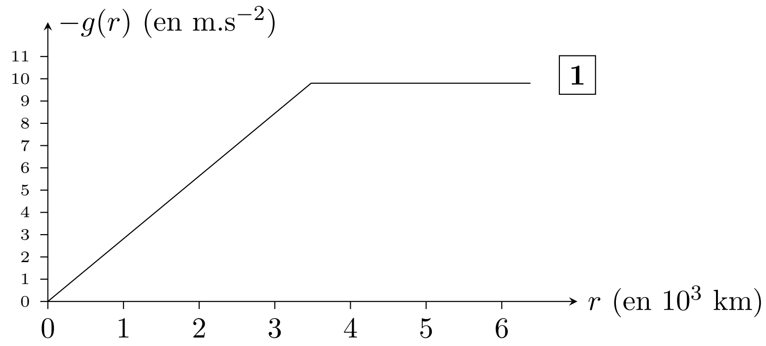
b) Déterminer l'expression et la valeur numérique du champ de gravitation à la frontière noyau-manteau.

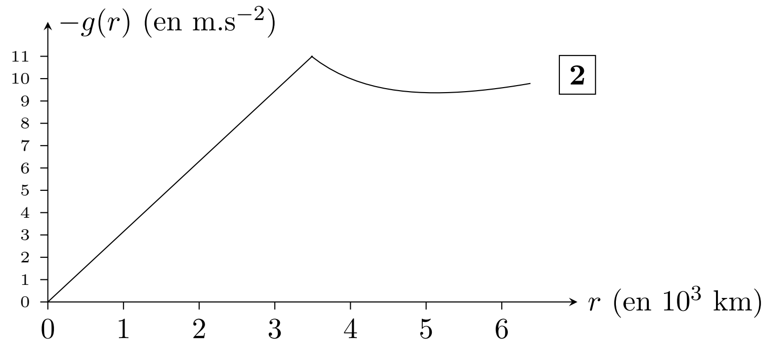
c) Des trois représentations de $g(r)$ page suivante, identifier celle qui correspond au modèle développé dans cet exercice.

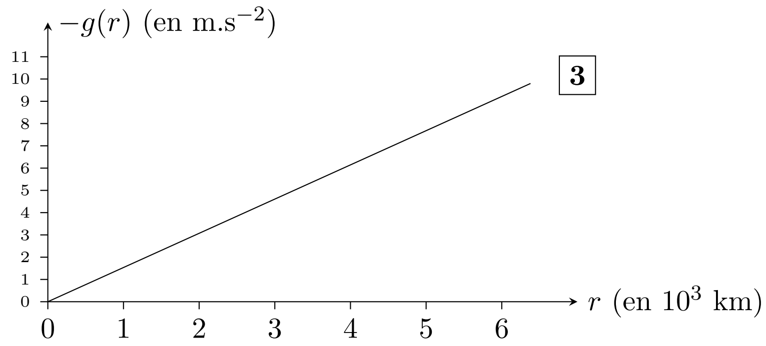
À quel type de modèle peuvent correspondre les deux autres courbes ? On donnera les expressions des masses volumiques correspondantes.

<u>Donnée</u> :

$$\operatorname{div}\left(a(r)\,\overrightarrow{e_r}\right) = \frac{1}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}(r^2 a(r))}{\mathrm{d}r}$$







III. Champ électrostatique créé par un noyau atomique

Du point de vue du potentiel et du champ électrostatique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon a. On désigne par $r_p = OP$ la distance d'un point P à O dans la boule de rayon a et par $r = OM$ celle d'un point M quelconque de l'espace.

La densité volumique de charges a pour expression :

$$\rho(P) = \rho_0 \left(1 - \frac{r_P^2}{a^2}\right)$$

où ρ_0 est une constante positive.

1. Exprimer la charge totale Q_n du noyau en fonction de ρ_0 et a.

2. Après avoir étudié soigneusement les symétries du champ électrostatique créé par ce noyau au point M, déterminer son expression en fonction de ρ_0, a et r, puis en fonction de Q_n, a et r pour $r \leqslant a$ et pour $r > a$.