

Corrigé du DM n°6

I. Hexapôle électrostatique (extrait de X PC 2005)

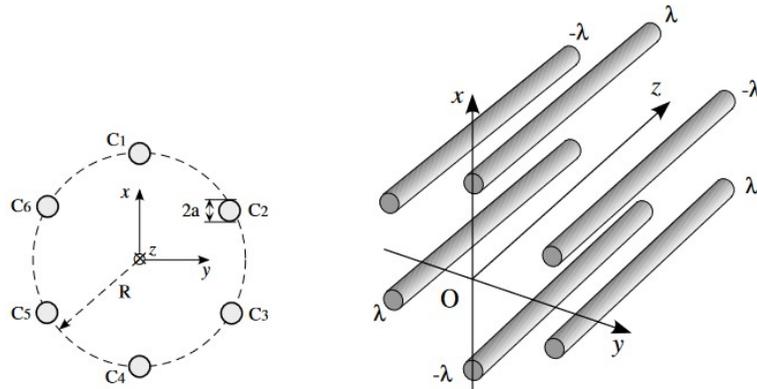


Figure 1

1. Analyse des symétries

a) À priori, les champ et potentiel électrostatiques en M s'écrivent sous la forme :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

et

$$V(M) = V(r, \theta, z)$$

L'invariance de la distribution de charges par toute translation de direction \vec{e}_z entraîne que V ainsi que les trois composantes E_r , E_θ et E_z ne **dépendent pas de z** .

De plus, comme $\partial V / \partial z = 0$, il en résulte que, puisque $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$:

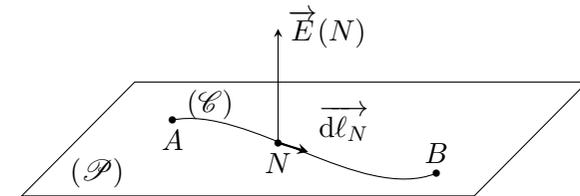
$$E_z(r, \theta) = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

- b) Le plan perpendiculaire à l'axe Oz est un plan de symétrie des charges (donc du champ électrostatique) contenant M . On en déduit que $E_z(r, \theta) = 0$, ce qui est déjà connu après la question 1.
- c) Ce sont trois plans de symétrie des charges. Si le point M appartient à l'un de ces plans, alors $E_\theta(M) = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} E_\theta(r, 0) &= E_\theta(r, 2\pi/6) = E_\theta(r, 4\pi/6) = E_\theta(r, \pi) \\ &= E_\theta(r, 8\pi/6) = E_\theta(r, 10\pi/6) = 0 \end{aligned}$$

- d) Ces trois plans sont des plans d'antisymétrie de la distribution de charges.

Considérons un des ces plans que nous notons (\mathcal{P}) : en tout point N de celui-ci, $\vec{E}(N)$ est orthogonal au plan. Soient alors deux points *quelconques* A et B de (\mathcal{P}) ainsi que (\mathcal{C}) une courbe reliant A et B et qui est entièrement contenue dans (\mathcal{P}) .



Le théorème de la circulation conduit à :

$$V(A) - V(B) = \int_{A, (\mathcal{C})}^B \vec{E}(N) \cdot \overrightarrow{d\ell}_N = 0$$

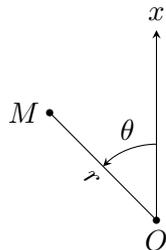
par perpendicularité des deux vecteurs en tout point N de (\mathcal{C}) . On en déduit que $V(A) = V(B)$ pour tout couple de points A et B de (\mathcal{P}) . Le plan (\mathcal{P}) est donc bien un plan équipotentiel.

- e) La distribution de charges est invariante par une rotation d'axe Oz et d'angle $2\pi/3$ [2 π] ainsi que par une rotation d'axe Oz et d'angle $4\pi/3$ [2 π]. On en déduit que les deux composantes $E_r(r, \theta)$ et $E_\theta(r, \theta)$ sont périodiques dans leur variable angulaire θ , de période $2\pi/3$. Autrement dit ($4\pi/3$ étant un multiple de $2\pi/3$) :

$$\forall r > 0, \forall \theta \in [0, 2\pi[, \begin{cases} E_r(r, \theta + 2\pi/3) = E_r(r, \theta) \\ E_\theta(r, \theta + 2\pi/3) = E_\theta(r, \theta) \end{cases}$$

Étude de V :

On calcule $V(r, \theta)$ grâce au théorème de la circulation entre O et M en choisissant le chemin en ligne droite indiqué sur la figure ci-dessous :



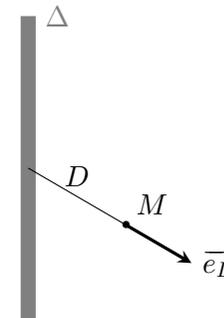
$$V(r, \theta) = V(O) + \int_0^r E_r(r', \theta) dr'$$

Il s'ensuit que, pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned} V(r, \theta + 2\pi/3) &= V(O) + \int_0^r E_r(r', \theta + 2\pi/3) dr' \\ &= V(O) + \int_0^r E_r(r', \theta) dr' \\ &= V(r, \theta) \end{aligned}$$

Le potentiel électrostatique est donc aussi une fonction périodique de l'angle θ , de période $2\pi/3$.

2. Considérons une électrode de densité linéique de charge λ . Notons Δ l'axe de l'électrode.



Soit \vec{E}_1 le champ électrostatique créé par cette électrode. Le plan (Δ, M) et le plan orthogonal à Δ contenant M sont des plans de symétrie de l'électrode contenant M : on en déduit que $\vec{E}_1(M) // \vec{e}_D$. De plus il y a invariance par toute translation de direction Δ et par toute rotation autour de Δ . Cela entraîne :

$$\vec{E}_1(M) = E_1(D) \vec{e}_D$$

Le théorème de Gauss utilisé avec un cylindre d'axe l'électrode, de rayon D et de hauteur h conduit à (le flux sur les bases du

cylindre étant nul) :

$$\Phi(\vec{E}_1/S_G) = 2\pi D h E_1(D) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

d'où :

$$\vec{E}_1(D) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 D} \vec{e}_D$$

De $\vec{E}_1 = -\text{grad} V_1 = -\frac{\partial V_1}{\partial D} \vec{e}_D$ on déduit :

$$V_1(D) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(D) + C_1$$

où C_1 est une constante (non unicité du potentiel).

3. Appliquons le théorème de superposition. En tenant compte du signe de λ des différentes électrodes, nous aboutissons à l'expression :

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5}\right) + \sum_{i=1}^6 C_i$$

Or si $M \in Oz$ on a $D_1 = D_2 = \dots = D_6$ (égalité des distances) et le potentiel doit être nul. On en déduit que :

$$\sum_{i=1}^6 C_i = 0$$

d'où le résultat demandé par l'énoncé.

4. Soient A et B deux points du plan xOy . On les repère par les complexes $\underline{Z}_A = x_A + iy_A$ et $\underline{Z}_B = x_B + iy_B$. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} |\underline{Z}_A - \underline{Z}_B| &= |x_A - x_B + i(y_A - y_B)| \\ &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ &= d(A, B) \end{aligned}$$

où $d(A, B)$ est la distance euclidienne entre A et B . On utilise ce résultat pour calculer les distances D_i .

$$\begin{aligned} D_2 D_4 D_6 &= |\underline{Z} + R| |\underline{Z} + jR| |\underline{Z} + j^2 R| \\ &= |(\underline{Z} + R)(\underline{Z} + jR)(\underline{Z} + j^2 R)| \\ &= |\underline{Z}^3 + \underline{Z}^2 R(1 + j + j^2) + \underline{Z} R^2(1 + j + j^2) + j^3 R^3| \end{aligned}$$

Or :

$$j^3 = 1 \quad \text{et} \quad 1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$$

ce qui conduit à :

$$D_2 D_4 D_6 = |\underline{Z}^3 + R^3|$$

Un calcul similaire peut être fait pour $D_1 D_3 D_5$: il suffit de changer R en $-R$; on retrouve les deux termes $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$ et cela conduit au résultat :

$$D_1 D_3 D_5 = |\underline{Z}^3 - R^3|$$

5. On remarque que :

$$|R^3 \pm \underline{Z}^3| = |R^3 \pm r^3 e^{3i\theta}| = R^3 \left| 1 \pm \frac{r^3}{R^3} e^{3i\theta} \right|$$

ce qui incite à poser $u = \frac{r}{R} \ll 1$ et à faire un développement limité à l'ordre 1 en u . Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5} &= \frac{|1 + u \cos(3\theta) + i u \sin(3\theta)|}{|1 - u \cos(3\theta) - i u \sin(3\theta)|} \\ &= \frac{\sqrt{1 + 2u \cos(3\theta) + u^2}}{\sqrt{1 - 2u \cos(3\theta) + u^2}} \end{aligned}$$

d'où, à l'ordre 1 en u :

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [\ln(1 + 2u \cos(3\theta)) - \ln(1 - 2u \cos(3\theta))] + o(u) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} 4u \cos(3\theta) + o(u) \\ &\approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cos(3\theta) \end{aligned}$$

On remarque que :

- $V(M)$ ne dépend pas de z ,
- que les plans $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/2$ et $\theta = 5\pi/6$ (c'est à dire les trois plans passant par l'axe Oz et à égale distance des électrodes) sont **équipotentiels** (leur potentiel est nul, ce qui est cohérent puisqu'ils contiennent le point O),
- que $V(r, \theta)$ est une fonction périodique de θ de période $2\pi/3$.

L'expression de $V(M)$ au voisinage de $r = 0$ respecte donc les symétries étudiées en question 1.

6. On le fait pour C_1 (le potentiel des deux autres électrodes impaires est le même à cause de l'invariance par rotation d'angle $2\pi/3$). On a (on néglige bien sûr a devant R quand il le faut) :

$$D_1 = a \quad \text{et} \quad D_6 = D_2 = 2R \sin(\pi/6) = R$$

$$D_4 = 2R \quad \text{et} \quad D_5 = D_3 = 2R \sin(\pi/3) = \sqrt{3}R$$

d'où :

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2R^3}{3aR^2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2R}{3a}\right)$$

Les électrodes paires sont au potentiel $-V_0$ comme on peut le voir avec l'électrode C_4 : $D_4 = a$, $D_3 = D_5 = R$, $D_2 = D_6 = \sqrt{3}R$

et $D_1 = 2R$. On a donc :

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{3aR^2}{2R^3}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{3a}{2R}\right) = -V_0$$

7. La charge totale des trois électrodes impaires pour une longueur L d'électrode est $3\lambda L$ et celle des trois électrodes paires pour la même longueur L est $-3\lambda L$. On peut donc définir C_L :

$$C_L = \frac{3\lambda L}{V_0 - (-V_0)} = \frac{3\lambda L}{2V_0}$$

d'où, par unité de longueur :

$$C = \frac{3\lambda}{2V_0} = \frac{3\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{2R}{3a}\right)}$$

Remarque : exprimer le potentiel au centre de l'hexapôle en fonction de C et de V_0 ne semble pas avoir grand intérêt.

8. Application numérique. $C = 4,4 \cdot 10^{-11} \text{ F.m}^{-1}$. C'est une capacité linéique très faible.

II. Champ de gravitation créé par la Terre

1. Soient $\mathcal{D}_{\text{masse}}$ une distribution de masses créant un champ de gravitation $\vec{g}(M)$ en tout point M et S_F une surface fermée quelconque, orientée de l'intérieur vers l'extérieur. Alors :

$$\Phi(\vec{g}/S_F) = -4\pi G M_{\text{int}}$$

où $\Phi(\vec{g}/S_F)$ est le flux de \vec{g} à travers S_F , M_{int} est la masse contenu à l'intérieur de S_F et où G est la constante universelle de la gravitation.

2. À priori nous avons :

$$\vec{g}(M) = g_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + g_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + g_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi$$

Cependant :

- Les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont deux plans de symétrie de la distribution de masse contenant M . Il s'ensuit que :

$$g_\theta = g_\varphi = 0 \quad \text{d'où} \quad \vec{g}(M) = g_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$$

- De plus la distribution de masses est invariante par toute rotation d'axe Oz et par toute rotation d'axe OX où OX est un axe orthogonal au plan (Oz, OM) On en déduit que g_r ne dépend ni de θ , ni de φ et donc que :

$$\boxed{\vec{g}(M) = g_r(r) \vec{e}_r \stackrel{\text{noté}}{=} g(r) \vec{e}_r}$$

3. Appliquons le théorème de Gauss en choisissant comme surface fermée (surface de Gauss) S_F la sphère de centre O et de rayon r . Il vient :

$$\Phi(\vec{g}/S_F) = \iint_{S(O,r)} g(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = g(r) 4\pi r^2 = -4\pi G m(r)$$

puisque ici $M_{\text{int}} = m(r)$. On a donc :

$$\boxed{g(r) = -G \frac{m(r)}{r^2}}$$

4. Il faut distinguer les trois cas $r \leq R_n$, $R_n < r \leq R_T$ et $R_T < r$. Un calcul simple conduit à :

$$m(r) = \begin{cases} \mu_n \frac{4\pi}{3} r^3 & \text{si } r \leq R_n \\ \mu_n \frac{4\pi}{3} R_n^3 + \mu_m \frac{4\pi}{3} (r^3 - R_n^3) & \text{si } R_n < r \leq R_T \\ m_T & \text{si } R_T < r \end{cases}$$

On remarquera que dans ce modèle :

$$m_T = \mu_n \frac{4\pi}{3} R_n^3 + \mu_m \frac{4\pi}{3} (R_T^3 - R_n^3)$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\boxed{g(r) = -G \frac{m_T}{r^2} \quad \text{si } R_T < r}$$

On remarque que tout se passe comme si ce champ de gravitation était créé par une masse ponctuelle m_T concentrée au point O .

D'autre part, à la surface de la Terre, $g(R_T)$ a pour valeur numérique :

$$|g(R_T)| = 6,67 \cdot 10^{-11} \times \frac{5,97 \cdot 10^{24}}{6378000^2} = 9,79 \text{ m.s}^{-2}$$

ce qui est la valeur attendue (la différence avec 9,81 provient de la précision des données numériques sur G , m_T et R_T).

5. a) On a :

$$\boxed{\mu_n = \frac{m_n}{4\pi R_n^3/3} = 11,3 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}}$$

ce qui représente 11,3 fois la masse volumique de l'eau. Le noyau terrestre a donc une densité $d = 11,3$.

b) À la frontière noyau-manteau on a :

$$\boxed{|g(R_n)| = G \frac{m(R_n)}{R_n^2} = G \frac{m_n}{R_n^2} = 11,0 \text{ m.s}^{-2}}$$

soit un champ de gravitation légèrement supérieur à celui qui existe à la surface terrestre.

- c) Il s'agit manifestement de la représentation **(2)**. Pour analyser les deux autres représentations on utilise l'équation de Maxwell-Gauss de la gravitation :

$$\operatorname{div} \vec{g} = -4\pi G \mu \quad \text{donc} \quad \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 g(r))}{dr} = -4\pi G \mu$$

- La représentation **(3)** correspond à un champ de gravitation de la forme : $g(r) = -\alpha r$ où α est une constante positive. On en déduit :

$$\mu = \frac{3\alpha}{4\pi G}$$

ce qui correspond à une masse volumique uniforme de la Terre. Celle-ci ne peut alors qu'être égale à :

$$\mu = \frac{m_T}{4\pi R_T^3/3}$$

- La représentation **(1)** correspond à un modèle de noyau de masse volumique uniforme (car g est à croissance linéaire de 0 à R_n), puis un champ gravitationnel constant $g(r) = g(R_T) = -G m_T/R_T^2$ jusqu'à la surface de la Terre. Dans la partie $R_n < r \leq R_T$ on a donc :

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{1}{4\pi G} \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 g(R_T))}{dr} = \frac{m_T}{4\pi R_T^2} \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2)}{dr} \\ &= \frac{m_T}{2\pi R_T^2} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

c'est à dire une masse volumique non uniforme, avec une décroissance en $1/r$.

III. Champ électrostatique créé par un noyau atomique (d'après ENAC pilotes)

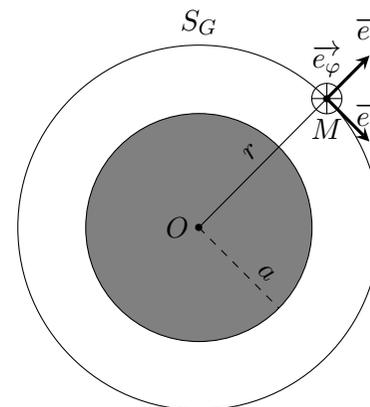
1. On a :

$$\begin{aligned} Q_n &= \int_{r_P=0}^a \int_{\theta_P=0}^{\pi} \int_{\varphi_P=0}^{2\pi} \mu(P) r_P^2 dr_P \sin \theta_P d\theta_P d\varphi_P \\ &= \rho_0 \int_0^a \left(r_P^2 - \frac{r_P^4}{a^2} \right) dr_P \int_0^{\pi} \sin \theta_P d\theta_P \int_0^{2\pi} d\varphi_P \\ &= \rho_0 \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{5} \right) \times 4\pi \end{aligned}$$

d'où :

$$Q_n = \frac{8\pi \rho_0}{15} a^3$$

2. Soit M un point de coordonnées sphériques (r, θ, φ) et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ la base locale sphérique en M .



- Les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges contenant M . On a donc :

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$$

- Il y a invariance par toute rotation d'axe Oz et toute rotation d'axe OX (axe orthogonal au plan (Oz, OM)), ce qui implique :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

On choisit comme surface de Gauss S_G la sphère de centre O et de rayon r (surface fermée). Il vient :

$$\Phi(\vec{E}/S_G) = 4\pi r^2 E(r)$$

La charge intérieure à cette surface est :

- $Q_{\text{int}} = Q_n$ si $a \leq r$.
- Q_{int} donnée par l'intégrale :

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \int_{r_P=0}^r \int_{\theta_P=0}^{\pi} \int_{\varphi_P=0}^{2\pi} \mu(P) r_P^2 dr_P \sin \theta_P d\theta_P d\varphi_P \\ &= \rho_0 \int_0^r \left(r_P^2 - \frac{r_P^4}{a^2} \right) dr_P \int_0^{\pi} \sin \theta_P d\theta_P \int_0^{2\pi} d\varphi_P \\ &= \rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right) \times 4\pi \end{aligned}$$

si $r < a$.

On en déduit que :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2} \quad \text{si } a \leq r$$

et, lorsque $r < a$:

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right) \vec{e}_r \\ &= \frac{Q_n}{8\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3} \left(5 - \frac{3r^2}{a^2} \right) \vec{e}_r \end{aligned}$$

On remarque bien la continuité de \vec{E} en $r = a$.