

**DM n°7**  
Pour le vendredi 1/12/2023

## 1 Détermination d'une concentration

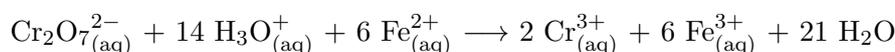
**Données à 25°C :**

Couple  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$  :  $E^0 = 0,77 \text{ V}$

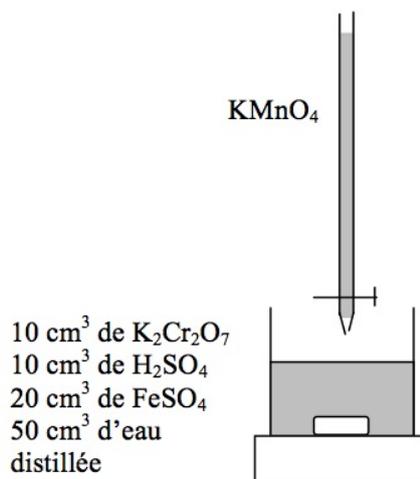
Couple  $\text{MnO}_4^- / \text{Mn}^{2+}$  :  $E^0 = 1,51 \text{ V}$

On mélange un volume  $V_0 = 10 \text{ mL}$  d'une solution de dichromate de potassium ( $2 \text{ K}_{(\text{aq})}^+ ; \text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}_{(\text{aq})}$ ), de concentration  $C_0$  inconnue et un volume  $V_1 = 20 \text{ mL}$  d'une solution de sulfate de fer ( $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+} ; \text{SO}_4^{2-}_{(\text{aq})}$ ) de concentration  $C_1 = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ . On y ajoute  $10 \text{ mL}$  d'acide sulfurique et  $50 \text{ mL}$  d'eau distillée.

Il se produit la réaction, supposée totale et rapide :



Les proportions sont calculées de sorte que les ion  $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$  soient en excès par rapport aux ions  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}_{(\text{aq})}$ .



On titre ensuite l'excès d'ions  $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$  par la solution de permanganate de potassium à  $C = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$  placée dans une burette.

- 1) Écrire l'équation - bilan de la réaction de titrage. Quel peut être l'intérêt d'ajouter de l'acide sulfurique ? de l'eau distillée ?
- 2) Montrer que cette réaction est totale.

La solution à titrer est initialement vert-pâle et, lorsque le titrage est terminé, il y a une goutte en excès de  $\text{MnO}_4^-$  et la solution prend une teinte rose-violette. On note un volume équivalent  $V_{\text{eq}} = 4,1 \text{ mL}$ .

- 3) En déduire, en justifiant tous les calculs, la concentration  $C_0$  du dichromate de potassium.

## 2 Conduction dans un métal

On donne les constantes physiques suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Charge élémentaire} & e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ \text{Masse de l'électron} & m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ \text{Perméabilité du vide} & \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \end{aligned}$$

On se propose d'étudier les effets d'un champ électromagnétique uniforme et stationnaire sur un matériau conducteur.

### Modèle de Drüde de la conduction

Le milieu matériel, électriquement neutre, est décrit comme un ensemble d'électrons de conduction (masse  $m$ , charge  $-e$ ) évoluant au sein d'un réseau constitué de charges positives fixes. Les interactions des électrons de conduction avec le milieu sont entièrement prises en compte en introduisant une force de frottement d'expression :

$$\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$$

où  $\tau$  est un coefficient positif, caractéristique du milieu et  $\vec{v}$  le vecteur vitesse d'un électron. Le référentiel d'étude est supposé galiléen et on le munit d'un repère  $(Oxyz)$  dont les vecteurs de la base cartésienne sont  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

- 1) On applique un champ électrique  $\vec{E}$  uniforme et stationnaire dans ce matériau. Écrire l'équation du mouvement d'un électron animé d'une vitesse  $\vec{v}$ .
- 2) Expliciter la solution générale de cette équation en supposant que, à un instant pris comme origine des temps, la vitesse de l'électron est  $\vec{v}_0$ . Montrer que la vitesse de l'électron tend vers une valeur limite  $\vec{v}_L$  que l'on exprimera en fonction de  $e$ ,  $\vec{E}$  et  $\tau$ . Quelle est la signification physique du coefficient  $\tau$  ?

Dans un métal typique, tel le cuivre,  $\tau = 2,51 \cdot 10^{-14}$  s. Le régime transitoire est donc rapidement terminé et tous les électrons possèdent la même vitesse  $\vec{v}_L$ .

- 3) Montrer que la densité volumique de courant  $\vec{j}$  vérifie la loi d'Ohm locale :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ . Exprimer la conductivité  $\gamma$  en fonction de  $e$ ,  $m$ ,  $\tau$  et de la densité volumique  $n_e$  des électrons de conduction.
- 4) Application numérique : calculer la valeur de la conductivité  $\gamma$  pour le cuivre sachant que :  $\tau = 2,51 \cdot 10^{-14}$  s et  $n_e = 8,45 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ .

On considère désormais un échantillon de ce matériau conducteur, en forme de parallélépipède dont le volume est délimité par les plans  $x = 0$ ,  $x = L$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ ,  $z = -a/2$  et  $z = a/2$  (Figure 1).

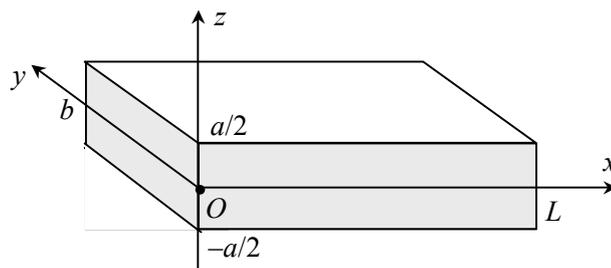


Figure 1

### Champ magnétique propre

- 5) Le régime est stationnaire. Un courant de densité volumique  $\vec{j} = j \vec{u}_x$  circule dans l'échantillon. L'épaisseur  $a$  étant faible devant les dimensions latérales  $L$  et  $b$ , on supposera que l'extension latérale selon  $Ox$  et selon  $Oy$  est infinie et que la densité de courant est uniforme dans l'échantillon.
- À l'aide des symétries, préciser l'orientation du champ magnétique  $\vec{B}_{\text{propre}}$  créé par cette distribution de courant en tout point de l'espace. Justifier le fait que ce champ est nul dans le plan  $z = 0$ .
  - Calculer  $\vec{B}_{\text{propre}}$  en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère. Quelle est sa valeur maximale pour  $a = 10 \mu\text{m}$  et  $j = 10^6 \text{A.m}^{-2}$  ?

### Loi d'Ohm en présence d'un champ magnétique extérieur

- 6) L'échantillon est désormais plongé dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$  uniforme et stationnaire. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $\vec{v}$  d'un électron soumis à la force de frottement, à ce champ magnétique et au champ électrique  $\vec{E}$ . On néglige le champ magnétique propre  $\vec{B}_{\text{propre}}$  devant  $\vec{B}$ .
- 7) Montrer que, après un régime transitoire très court, la densité volumique de courant est relié aux champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  par une équation de la forme :

$$\vec{j} = \gamma \left( \vec{E} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B} \right)$$

où  $\gamma = \frac{n_e \tau e^2}{m}$  et où  $R_H$  est une constante, appelée *constante de Hall*, dont on donnera l'expression en fonction de  $n_e$  et  $e$ .

On suppose que le champ électrique est parallèle au plan  $Oxy$  et que  $\vec{B} = B \vec{u}_z$  avec  $B > 0$ .

- 8) Établir les relations liant les composantes  $j_x$  et  $j_y$  de la densité volumique de courant aux composantes  $E_x$  et  $E_y$  du champ électrique. Montrer qu'elles peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}$$

dans laquelle :  $\rho_{xx} = \rho_{yy} = 1/\gamma$  et  $\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{n_e e}$ .

Dans les questions qui suivent on admettra qu'on peut utiliser la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$  en régime stationnaire, même si les charges électriques ne sont pas fixes.

## Influence de la géométrie

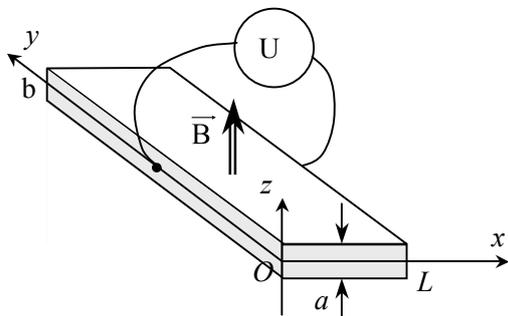


Figure 2a

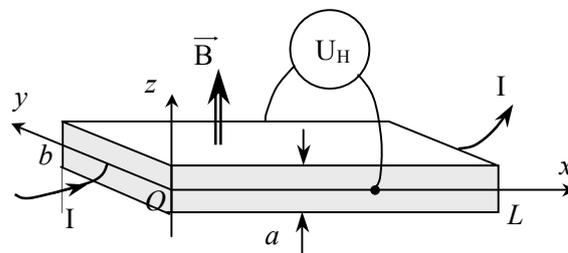


Figure 2b

- 9) L'échantillon a la forme d'un ruban allongé selon  $Oy$  :  $a \ll L \ll b$ . (Figure 2a). On applique une différence de potentiel  $U$  entre les plans métallisés  $x = 0$  et  $x = L$ . Le champ électrique  $\vec{E}$  est supposé uniforme :  $\vec{E} = E \vec{u}_x$ .

- Calculer l'intensité  $I$  qui traverse la face rectangulaire " $a \times b$ " et en déduire la résistance électrique  $R = U/I$  d'un tel échantillon.
- On note  $R_0$  la résistance électrique en l'absence de champ magnétique. Quelle est la modification relative :

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{R - R_0}{R_0}$$

induite par le champ magnétique? Ce phénomène porte le nom d'effet de "magnéto-résistance". Calculer cette modification pour le cuivre :  $B = 1,0 \text{ T}$  ;  $\gamma = 5,96 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$  ;  $n_e = 8,45 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ .

- 10) L'échantillon a la forme d'un ruban allongé selon  $Ox$  :  $a \ll b \ll L$ . (Figure 2b). Un courant stationnaire circule selon cette direction avec une densité volumique de courant uniforme  $\vec{j} = j \vec{u}_x$ . On note  $I$  son intensité à travers la surface rectangulaire " $a \times b$ ".

- Montrer que le champ électrique possède alors une composant  $E_y$  non nulle. Donner l'expression de la différence de potentiel  $U_H$ , appelée *tension de Hall*, qui apparaît entre les plans  $y = 0$  et  $y = b$ . Calculer  $U_H$  pour  $I = 1,0 \text{ mA}$  ;  $a = 10 \mu\text{m}$  ;  $n_e = 8,45 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$  et  $B = 1,0 \text{ T}$ .
- Quel est à votre avis l'intérêt d'un tel dispositif dans le domaine de la métrologie?