

DS n°3bis – Partie physique
Durée 3h – Samedi 25 novembre 2023

1. Réalisation d'un accéléromètre capacitif

Deux disques conducteurs D_1 et D_2 de même rayon, parallèles, sont écartés d'une distance $2d$. L'air qui les sépare est assimilable, du point de vue des propriétés électrostatiques, à du vide. La surface de chaque disque sera notée S .

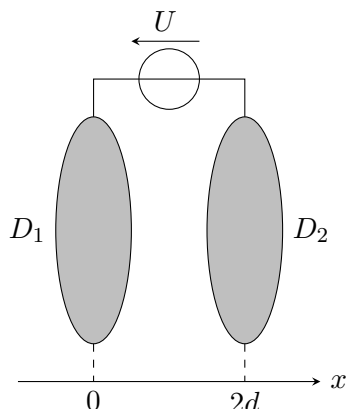


FIGURE 1 – Condensateur plan

Lorsqu'on établit une différence de potentiel (ddp) U entre les disques, il apparaît une charge électrique Q sur le disque D_1 et une charge opposée $-Q$ sur le disque D_2 . On supposera pour simplifier que ces charges sont réparties uniformément sur chaque disque.

I. Étude d'un condensateur plan idéal

Le disque D_1 est assimilé à un plan infini portant la densité surfacique de charge σ uniforme.

1. En utilisant les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charge, préciser en les justifiant la direction du champ électrostatique \vec{E}_1 créé par D_1 ainsi que sa dépendance avec les coordonnées spatiales.
2. Comparer les champs $\vec{E}_1(M)$ et $\vec{E}_1(M')$ en deux points M et M' symétriques par rapport au plan $x = 0$.
3. En appliquant le théorème de Gauss déterminer le champ \vec{E}_1 dans tout l'espace, en fonction de la charge Q et de S .
4. On assimile D_2 à un plan infini situé en $x = 2d$, uniformément chargé de densité $-\sigma$. Déterminer le champ électrostatique total \vec{E} créé par l'ensemble des deux plans $x = 0$ et $x = 2d$ en tout point de l'espace. En déduire la relation entre U , Q , S , d et ϵ_0 .

Montrer que ce dispositif forme un condensateur dont on donnera la capacité C en fonction de ϵ_0 , S et d .

On dira par la suite que D_1 et D_2 sont les deux armatures du condensateur.

II. Introduction d'une plaque métallique entre les deux armatures du condensateur

On introduit entre les deux armatures du condensateur plan précédent un disque métallique D d'épaisseur $h < 2d$, de même surface S que D_1 et D_2 et parallèle aux armatures du condensateur (Figure 2). Les effets de bords sont toujours négligés et, du point de vue des symétries, on considérera que D_1 , D_2 et D sont d'extension infinie dans des directions perpendiculaires à Ox .

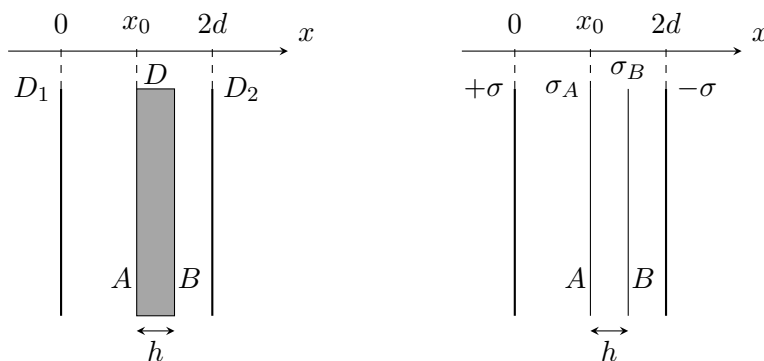


FIGURE 2 – Introduction d'un disque métallique entre les armatures

Avant son introduction dans le condensateur, le disque métallique D n'est pas chargé. Cependant, sous l'influence du champ électrique du condensateur, les électrons de conduction de D vont se déplacer et venir s'accumuler sur l'une des faces (A ou B sur le schéma), créant ainsi une distribution de charges surfacique. Il y a alors un défaut d'électrons sur la face opposée, ce qui est équivalent à une distribution surfacique de charges de signe opposé.

Un état d'équilibre finit par s'installer où les charges s'immobilisent dans le référentiel d'étude. L'ensemble condensateur et disque D seront alors modélisés comme quatre plans infinis comme indiqué sur la Figure 2, avec des densités surfaciques $+\sigma$, σ_A , σ_B et $-\sigma$.

5. Préciser les signes des densités σ_A et σ_B . Quelle est la relation entre σ_A et σ_B ?
6. On admet que les charges se répartissent sur les deux faces A et B de D de sorte à ce que le champ électrique total \vec{E} soit nul à l'intérieur de D , c'est à dire pour $x_0 \leq x \leq x_0 + h$. En déduire la relation entre σ_A et σ .
7. Déterminer l'expression du champ électrostatique pour $x \in [0, x_0]$ d'une part et pour $x \in [x_0 + h, 2d]$ d'autre part, en fonction de σ et de ϵ_0 . En déduire la différence de potentiel $U = V(x = 0) - V(x = 2d)$ entre les deux armatures du condensateur, en fonction de σ , d , h et ϵ_0 .
8. En déduire la capacité C' du condensateur ainsi obtenu. On exprimera C' en fonction de d , h , S et ϵ_0 . Conclure quant à l'influence du disque D sur la capacité du condensateur étudié dans la partie I.

III. Application à la mesure de l'accélération d'un véhicule

Pour mesurer l'accélération d'un véhicule le choix se porte sur un Mems (Micro-Electro-Mechanical-System). Il s'agit d'une famille technologique très utilisée par l'industrie automobile (notamment pour l'airbag) mais aussi par les particuliers car on les retrouve dans certaines manettes de consoles de jeu. La taille de ces capteurs est inférieure à celle d'une pièce de monnaie !

III.A. – Analyse du mouvement mécanique

On modélise le fonctionnement du Mems par le système représenté sur la Figure 3. Seule la masse mobile m , qui est un cube d'arête b , de centre d'inertie G peut se déplacer. Le reste du dispositif, appelé bâti, est fixé au véhicule et demeure solidaire de celui-ci. Le véhicule est muni d'un repère Ox de vecteur unitaire \vec{e}_x .

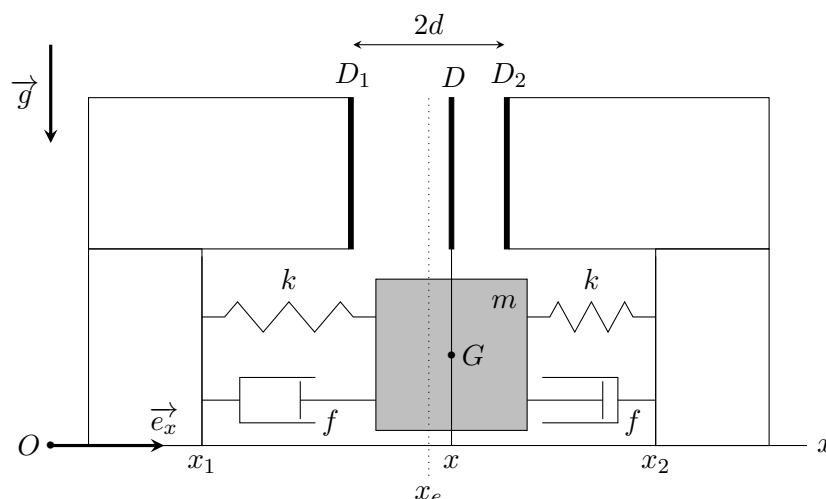


FIGURE 3 – Modélisation mécanique à une dimension du MEMS

Le mouvement, sans frottements, ne peut se faire que selon l'axe Ox . La masse est liée à deux ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , mais aussi à deux amortisseurs induisant une force proportionnelle à la vitesse relative de la masse m par rapport au bâti avec le coefficient de frottement f . On ne se préoccupe pas de la présence éventuelle d'autres forces, notamment électrostatiques. On note $x_e = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ la position du centre d'inertie G de la masse m lorsque celle-ci et le véhicule sont immobiles. Par ailleurs on note x la position de G à un instant t quelconque dans le référentiel lié au véhicule.

On suppose que la longueur des ressorts est égale à leur longueur à vide lorsque $x = x_e$. On introduira les quantités $L = x - x_e$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ et $\mu = \frac{f}{\sqrt{2km}}$.

On suppose que le véhicule se déplace en ligne droite par rapport au sol, selon un axe parallèle à Ox . Dans tout ce qui suit, le sol est considéré comme un référentiel galiléen.

9. Exprimer la résultante \vec{F}_r des forces de tension des ressorts appliquée à m en fonction de k , L et du vecteur \vec{e}_x . Exprimer la résultante \vec{F}_a des forces d'amortissement appliquée à m en fonction de f , $\dot{L} = dL/dt$ et du vecteur \vec{e}_x .
10. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel du véhicule, déterminer l'équation différentielle vérifiée par L , lorsque le véhicule possède une accélération par rapport au sol $\vec{a} = a \vec{e}_x$ constante.
11. Afin d'étudier la réponse mécanique globale de ce système, on s'intéresse au cas particulier d'une accélération sinusoïdale de pulsation ω , les représentations complexes des grandeurs physiques $a(t)$ et $L(t)$ sont notées $\underline{a} = A_m e^{j\omega t}$ et $\underline{L} = L_m e^{j\omega t}$. Calculer la transmittance complexe $\underline{L}/\underline{a}$ de ce système en fonction de $\xi = \frac{\omega}{\omega_0}$, μ et ω_0 .

En déduire le domaine de pulsations dans lequel une mesure de L permet de déterminer l'accélération du véhicule. On justifiera le raisonnement.

12. L'accélération du véhicule est maintenant supposée constante. Vers quelle valeur L_∞ tend $L(t)$ au bout d'un temps suffisamment grand? Exprimer L_∞ en fonction de a et ω_0 . Comment ajuster μ pour que $L(t)$ tende vers L_∞ sans osciller et le plus rapidement possible?

III.B. – Mesure de l'accélération

Comme le montre la Figure 3, le cube de masse m est solidaire d'une lame D en forme de disque pouvant se déplacer entre deux disques conducteurs D_1 et D_2 solidaires du châssis. Ce dispositif est celui qui a été étudié dans la partie II. : les deux disques et la lame ont la même surface S mais on supposera dans cette partie que la lame D est d'épaisseur négligeable. Le disque D_1 et la lame forment un condensateur plan de capacité C_1 . De même, le disque D_2 et la lame forment un condensateur plan de capacité C_2 .

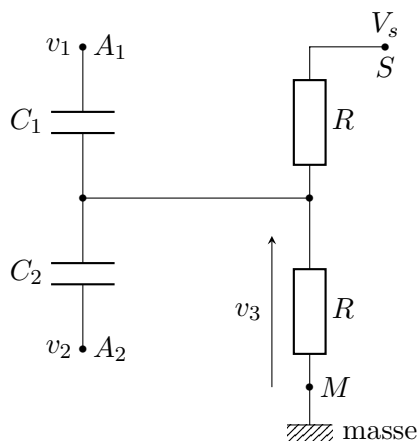


FIGURE 4 – Modélisation électrique

Ce dispositif est relié par des connexions électriques non représentées sur le schéma de la Figure 3 à un circuit électrique modélisable par le schéma de la Figure 4. On note v_1 et v_2 les potentiels électriques des points A_1 et A_2 et V_s le potentiel supposé constant du point S . Le potentiel nul (masse du montage) est fixé au point M . Des générateurs non représentés imposent :

$$v_1(t) = \frac{V_s}{2} + V_1 \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{V_s}{2} - V_1 \sin(\omega t)$$

où V_1 est une constante.

13. Exprimer C_1 et C_2 en fonction de ϵ_0 , S , d et L

On suppose désormais et jusqu'à la fin du problème que l'accélération du véhicule par rapport au sol est constante, de valeur a . On se place dans les conditions où L a atteint sa valeur L_∞ .

14. On introduit la constante de temps $\tau = \frac{1}{2}R(C_1 + C_2)$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v_3(t)$ en fonction de V_s , τ , ω , $\cos(\omega t)$ et de la tension $V_2 = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} V_1$

15. La solution générale de cette équation s'écrit :

$$v_3(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{V_s}{2} + A_3 \cos(\omega t) + B_3 \sin(\omega t)$$

où A est une constante associée au régime libre, fixée par les conditions initiales et qu'on ne cherchera pas à déterminer. Déterminer les deux constantes A_3 et B_3 en fonction de ω , τ et V_2 .

16. On fixe $\tau = 5,0$ ms et $\omega = 1,0 \cdot 10^5$ rad.s⁻¹. La mesure de v_3 se fait pour $t \gg \tau$. En déduire dans ces conditions une expression approchée de $v_3(t)$ ne dépendant plus que de V_s , V_2 et $\sin(\omega t)$. On conservera cette expression pour la suite de l'étude.

Pour extraire l'information sur l'accélération, le principe utilisé est celui de la démodulation synchrone. Le signal $v_3(t)$ est multiplié par $v_1(t)$ pour obtenir un signal $s_1(t) = h v_1(t) \times v_3(t)$ où h est un coefficient multiplicatif positif. Le signal $s_1(t)$ est ensuite filtré pour obtenir le signal $s(t)$. L'ensemble de ce dispositif d'acquisition est représenté sur la Figure 5.

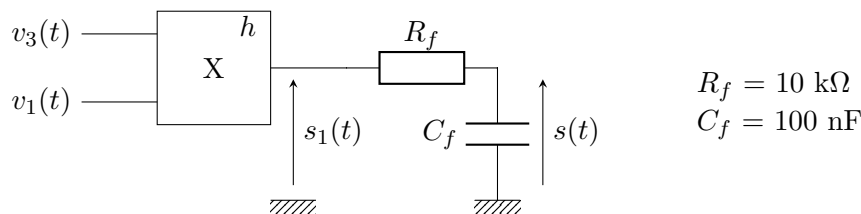


FIGURE 5 – Dispositif de mesure de l'accélération

17. Après avoir écrit l'expression de $s_1(t)$, déterminer le signal $s(t)$ qu'il est possible d'observer en mode DC sur l'oscilloscope. On détaillera le raisonnement permettant d'obtenir cette expression et on exprimera tout d'abord $s(t)$ en fonction de h , V_1 , L , d et V_s puis, en supposant que L et a ne dépendent pas du temps en fonction de h , k , V_1 , a , m , d et V_s .

2. Mesure des variations du champ de gravitation terrestre

Données numériques :

Constante de la gravitation universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11}$ m³.s⁻².kg⁻¹

Masse de la Terre : $m_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg

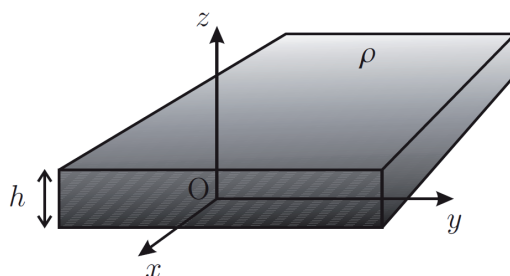
Rayon terrestre moyen (au niveau de la mer) : $R_T = 6\,371$ km

Lorsqu'une question est marquée (**R.P.**) (résolution de problème), elle n'est pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

On s'intéresse au champ gravitationnel $\vec{g}(M)$ créé en un point M par une distribution de masse volumique ρ qui satisfait les équations locales suivantes :

$$\operatorname{div} \vec{g} = -4\pi G \rho \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{g} = \vec{0} \quad (1)$$

1. Dresser une analogie entre les équations (1) et celles de l'électrostatique.
2. Énoncer le théorème de Gauss gravitationnel.

FIGURE 6 – Tranche de matière d'épaisseur h .

3. On considère une tranche de matière d'épaisseur h comprise entre les deux plans $z = -h/2$ et $z = +h/2$. Cette tranche est infinie dans les directions Ox et Oy et on suppose que la masse volumique ρ de la matière qui y est contenue est uniforme
- Déterminer soigneusement par une étude de symétries la direction de $\vec{g}(M)$ en un point M quelconque ainsi que les coordonnées dont il dépend.
 - Que dire de la valeur du champ de gravitation en un point M du plan (xOy) ? En deux points M et M' symétriques par rapport au plan (xOy) ?
 - Par une méthode de votre choix, déterminer l'expression du champ de gravitation créé par la tranche en tout point M de l'espace. En donner une représentation en fonction de z .
4. Dans cette question la Terre est assimilée à une boule de centre O et de rayon R_T , dont la répartition de masses est à symétrie sphérique. Sa masse totale est m_T .

Le champ de gravitation $\vec{g}_T(M)$ créé par cette boule en un point M tel que $OM = r > R_T$ est de la forme $\vec{g}_T(M) = -g_T(r) \vec{e}_r$ où $\vec{e}_r = \overrightarrow{OM}/r$.

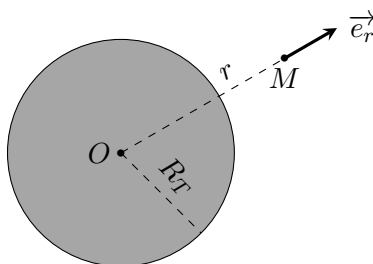


FIGURE 7 – Modèle sphérique de la Terre.

- Déterminer l'expression de $g_T(r)$ en fonction des paramètres G et m_T .
- Le champ de gravitation au niveau de la mer ($r = R_T$) est $g_0 > 0$. Déterminer une expression approchée de g_T à une altitude h au dessus du niveau de la mer en fonction de g_0 et du rapport h/R_T . On supposera h petit devant R_T pour se contenter d'une expression à l'ordre 1 en h/R_T .

Application numérique : calculer g_0 .

On se propose de calculer la variation du champ de gravitation terrestre telle qu'elle a été mesurée par Bouguer en 1738 sur un haut plateau chilien situé à l'altitude $h = 1000$ m par rapport au niveau de la mer (figure 8). On fait les hypothèses suivantes :

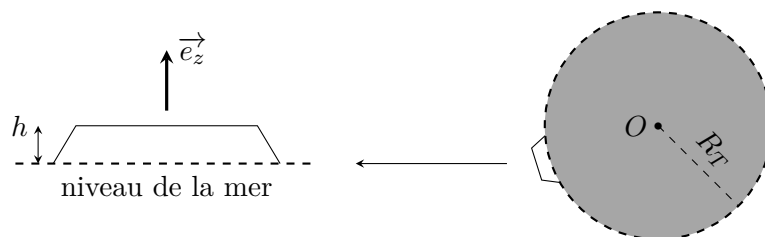


FIGURE 8 – Modélisation du plateau chilien.

- le plateau est de masse volumique $\rho_P = 2670 \text{ kg.m}^{-3}$ uniforme ;
 - on le suppose suffisamment étendu dans les directions horizontales pour pouvoir l'assimiler à une tranche infinie d'épaisseur h pour les calculs qui nous intéressent.
 - On note \vec{e}_z le vecteur unitaire ascendant dans la direction de la verticale locale au niveau du plateau.
5. Soit g ($g > 0$) le champ de gravitation terrestre à la surface du plateau chilien. Établir l'expression de $\Delta g = g - g_0$ en fonction de G , ρ_P , g_0 , h et R_T .

Application numérique : calculer Δg .

6. (R.P.) Bouguer disposait d'un pendule simple dont la longueur L avait été ajustée pour que celui-ci ait une période $T_0 = 1 \text{ s}$ au niveau de la mer et il savait mesurer une période d'oscillation avec une précision de 10^{-5} .

Était-il capable avec ce dispositif de mesurer l'écart Δg du champ de gravitation terrestre entre le niveau de la mer et le plateau ?

3. Piéger une particule

Données générales :

Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Masse d'un proton : $m_p = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Laplacien scalaire : $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

L'objectif est de piéger une particule chargée en vue de la garder stockée le plus longtemps possible. L'idée la plus simple consiste à piéger cette particule dans un puits de potentiel.

Le dispositif de piégeage est représenté sur la figure 9 ; il compte trois électrodes métalliques présentant une symétrie de révolution autour d'un axe (Oz). La première, notée E_B , est en forme d'anneau de rayon interne r_0 et d'équation $x^2 + y^2 - 2z^2 = r_0^2$; elle est portée à un potentiel V_0 positif. Les deux autres, notées E_{A1} et E_{A2} , sont en forme de coupelles et correspondent aux deux nappes de l'hyperboloïde d'équation $x^2 + y^2 - 2z^2 = -2z_0^2$; elles sont reliées à la masse.

La distance minimale entre les deux coupelles est telle que $2z_0 = \sqrt{2}r_0$. On note $V(x, y, z)$ le potentiel régnant dans le piège à l'intérieur duquel on a fait le vide. Ce potentiel est donc tel que $V(0, 0, z_0) = 0$ d'une part et d'autre part si $x^2 + y^2 = r_0^2$ alors $V(x, y, 0) = V_0$.

On admet qu'une particule ponctuelle de charge q placée dans le piège est soumise à une force électrique de la forme $\vec{F} = a(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y) + bz\vec{u}_z$ où a et b sont deux paramètres réels.

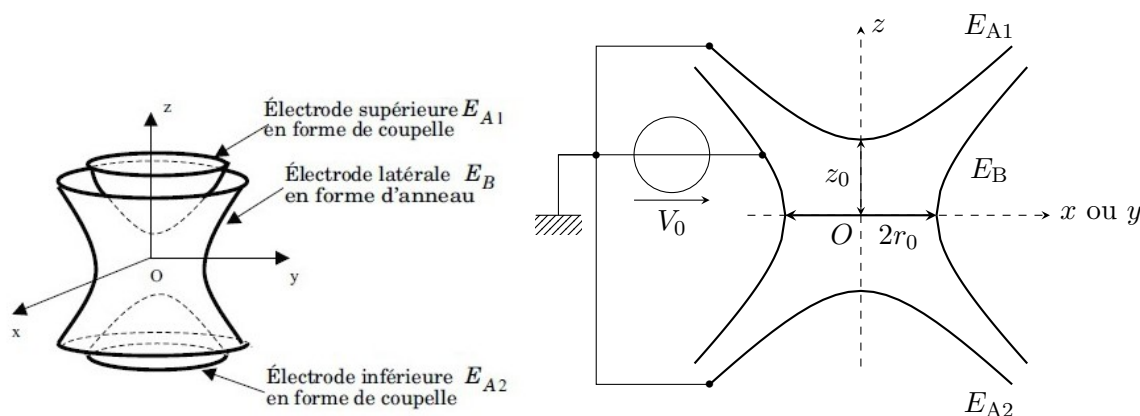


FIGURE 9 – Dispositif de piégeage à trois électrodes

1. En écrivant l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le potentiel $V(x, y, z)$ obtenir une relation entre a et b . Montrer que le potentiel s'écrit sous la forme :

$$V(x, y, z) = \alpha + \beta (x^2 + y^2 - 2z^2)$$

puis, exprimer α en fonction de V_0 et β en fonction de r_0 et V_0 .

2. Tracer les équipotentielles dans les plans xOz et xOy . En déduire les lignes de champ orientées dans ces mêmes plans.
3. En écrivant le principe fondamental de la dynamique montrer que le point $O(0, 0, 0)$ est un équilibre. Montrer que cet équilibre est globalement instable quel que soit le signe de la charge placée dans ce potentiel.

Afin d'éliminer l'instabilité démontrée à la question **3.**, une solution est d'ajouter un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ avec $B_0 = 1,0$ T dans le dispositif électrostatique. Le piège devient ainsi une trappe de Penning ; le mérite de sa mise en œuvre concrète est dû à H. G. Dehmelt qui reçut le prix Nobel de physique en 1989 pour cette réalisation, l'idée originale de F.M. Penning datant de 1936.

4. La particule piégée dans la trappe de Penning est un antiproton \bar{p} de masse m_p et de charge $q = -e$. Établir les équations différentielles vérifiées par les fonctions $z(t)$ et $\xi(t) = x(t) + iy(t)$, où x , y et z sont les coordonnées cartésiennes de l'antiproton.

On introduira les constantes $\omega_c = \frac{eB_0}{m_p}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{eV_0}{m_p r_0^2}}$. Montrer qu'il existe un champ B_{\min} , tel que si $B_0 > B_{\min}$ conduit au confinement de l'antiproton. Calculer la valeur de B_{\min} pour un piège tel que $V_0 = 5,0$ V et $r_0 = 5,7$ mm.

5. Calculer la valeur numérique de ω_0 et ω_c pour la trappe de Penning considérée. En déduire que le mouvement confiné de l'antiproton dans cette trappe est la composition d'un mouvement rapide et de deux mouvements plus lents. On donnera une estimation simple des pulsations de ces trois mouvements en fonction de ω_0 et ω_c .

FIN DU DEVOIR