Réponses

1)

$$-e\vec{E} - \alpha\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m}\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

En posant

$$\tau = \frac{m}{\alpha}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}}$$

---

2) Si on supprime le champ, l'équation devient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{0}$$

En résolvant (exceptionnellement) vectoriellement, on trouve

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v_0}\, e^{-t/\tau}}$$

τ est le temps de relaxation caractéristique de l'amortissement.

En 4 ou 5 τ, on aura à 1% près $\vec{v} = \vec{0}$

---

3) En régime stationnaire, on aura

$$\frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

(solution particulière de l'équa diff, correspondant à $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$)

or

$$\vec{j} = \rho\,\vec{v} \qquad (\rho = \text{libre})$$

$$= -n e\,\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{j} = \frac{n e^2 \tau}{m}\vec{E}}$$

En posant

$$\boxed{\gamma = \frac{n e^2 \tau}{m}}$$

on retrouve bien la loi d'Ohm

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}$$

---

4) A.N.

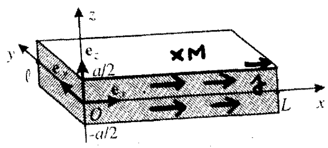
$$\tau = \frac{\gamma\, m}{n\, e^2}$$

$$= \frac{100 \quad 0{,}06 \quad 0{,}91\ 10^{-30}}{10^{24} \quad (1{,}6\ 10^{-19})^2}$$

$$\boxed{\tau = 2{,}13\ 10^{-16}\,s}$$

Commentaire : on peut estimer qu'en $10^{-15}\,s$ environ le régime stationnaire est quasiment atteint. La loi d'Ohm est donc valable jusqu'à des fréquences de l'ordre de 10^{15} Hz.

5)



La nappe de courant est supposée infinie selon x et selon y donc $\vec{b} = \vec{b}(z)$

→ un plan (xMz) est plan de symétrie et $\vec{b}_{(M)}$ est donc perpendiculaire à ce plan

$$\boxed{\vec{b}(M) = b(z)\ \vec{u_y}}$$

→ Pour un point M tel que $z=0$, il y a alors deux plans de symétrie : (xMz) mais aussi (xMy). $\vec{b}$ ne peut être en même temps selon $\vec{u_y}$ et selon $\vec{u_z}$. Donc $\vec{b}$ est nul.

$$\boxed{\vec{b}(z=0) = \vec{0}}$$

remarque

En considérant deux points

$M\ (x, y, z)$

$M'\ (x, y, -z)$ sym de M / plan xOy

on aurait

$$\vec{b}(M') = -\ \text{sym}\ \vec{b}(M)$$

$$b(-z) = -\ b(z)$$

$b(z)$ est une fonction impaire de z

5) M.A. $\vec{rot}\,\vec{b} = \mu_0 \vec{j} + \cancel{\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$ nul en régime permanent

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{b} = \mu_0 \vec{j}$$

$$(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z}) \begin{vmatrix} \times \\ \times \\ \frac{d}{dz} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ b(z) \\ 0 \end{vmatrix} = \mu_0 \begin{vmatrix} j(z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{-\frac{db(z)}{dz} = \mu_0\, j(z)}$$

Les 3 cas :

<u>$-a/2 < z < a/2$</u>

$$j(z) = j$$

$$-\frac{db(z)}{dz} = \mu_0 j$$

$$b(z) = -\mu_0 j z + A$$

doit être nul en $z=0$ donc A est nul

$$\boxed{\vec{b}(-a/2 < z < a/2) = -\mu_0 j z\, \vec{u_y}}$$

<u>$z > a/2$</u>

$$j(z) = 0$$

$$b(z) = A'$$

par continuité en $z = a/2$

$$\boxed{\vec{b}(z > a/2) = -\mu_0 j \frac{a}{2} \vec{u_y}}$$

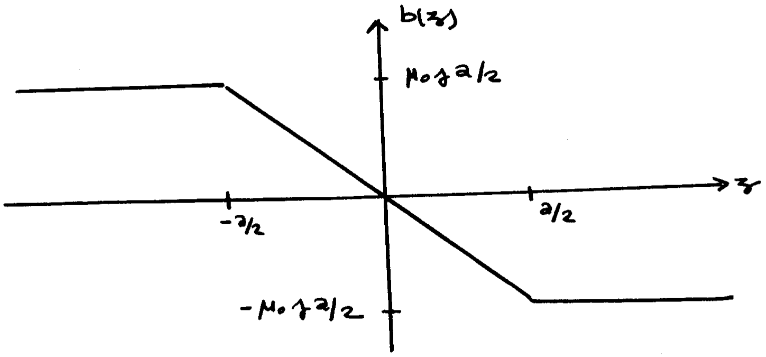
<u>$z < -a/2$</u>

$$j(z) = 0$$

$$b(z) = A''$$

par continuité en $z = -a/2$

$$\boxed{\vec{b}(z < -\frac{a}{2}) = +\mu_0 j \frac{a}{2} \vec{u_y}}$$



A.N.

$$b_{max} = \mu_0 \, j \, a/2$$
$$= 4\pi \, 10^{-7} \; 10^{6} \; 10 \; 10^{-6}/2$$
$$= 2\pi \; 10^{-6}$$

$$\boxed{b_{max} = 6{,}3 \; 10^{-6} \, T}$$

remarque :

La composante horizontale du champ magnétique terrestre est égale à $2{,}0 \; 10^{-5}\,T$ à Paris.

Donc b est assez faible comparé à cette référence

Le problème néglige $\vec{b}$ dans la suite.

---

7)
$$-\alpha \vec{v} - e\,\vec{v} \wedge \vec{B} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

donc :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\alpha}{m}\,\vec{v} - \frac{e}{m}\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$
$$= -\frac{1}{\tau}\,\vec{v} + \underbrace{\frac{e\vec{B}}{m}}_{\vec{\omega_c}} \wedge \vec{v}$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned} \tau &= \frac{m}{\alpha} \\ \vec{\omega_c} &= \frac{e\vec{B}}{m} \end{aligned}}$$

et si $\tau \to \infty$ (frottement nul)

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega_c} \wedge \vec{v}}$$

formule caractéristique pour un vecteur tournant (donc de norme constante) de vecteur rotation $\vec{\omega_c}$

A.N.

$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$
$$= \frac{1{,}6 \; 10^{-19} \; 1}{0{,}06 \;\; 0{,}91 \; 10^{-30}}$$

$$\boxed{\omega_c = 2{,}9 \; 10^{12} \, rad\, s^{-1}}$$

---

8) Ici, en présence de $\vec{E}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{v}}{\tau} + \vec{\omega_c} \wedge \vec{v} - \frac{e}{m}\vec{E}$$

avec $\vec{j} = -ne\vec{v}$

$$-ne\frac{d\vec{v}}{dt} = +ne\frac{\vec{v}}{\tau} + \vec{\omega_c} \wedge -ne\vec{v} + \frac{ne^2}{m}\vec{E}$$

$$\underbrace{\frac{d\vec{j}}{dt}}_{\text{nul en régime stationnaire}} = -\frac{\vec{j}}{\tau} + \vec{\omega_c} \wedge \vec{j} + \frac{\gamma}{\tau}\vec{E}$$

avec $\dfrac{\vec{\omega_c}\,\tau}{\gamma} = \dfrac{\frac{e\vec{B}}{m}\tau}{\frac{ne^2\tau}{m}} = \dfrac{\vec{B}}{ne}$

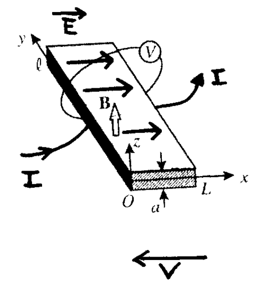
finalement :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} - \frac{\vec{B}}{ne} \wedge \vec{j}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & \frac{B}{ne} \\ -\frac{B}{ne} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}}_{\text{matrice résistivité}} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix}$$

9)



→ en l'absence de $\vec{B}$, on sait que

$$R_o = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}$$

$$\boxed{R_o = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{a\ell}}$$

remarque : démonstration

E $\quad \vec{j} = j_x \, \vec{u_x}$ est uniforme

avec : $V = V(x=0) - V(x=L) = -\int_{x=L}^{x=0} E_x \, dx$

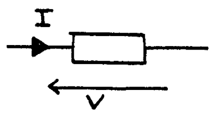
$$= -\int_L^0 \frac{j_x}{\gamma} \, dx$$

$$= \frac{j_x \, L}{\gamma}$$

et $\quad I = \iint_{\text{(sens } x \text{ croissants)}} \vec{j} \, \vec{dS} = \iint_{\text{section droite}} j_x \, dy \, dz$

$$= j_x \, a \, \ell$$

$$R_0 = \frac{V}{I} = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{a \ell}$$



$\longrightarrow$ en présence de $\vec{B}$

avec $\ell \gg L$ donc on suppose que le champ n'est pas modifié (cf faces $y=0$ et $y=\ell$ éloignées donc le champ de Hall est négligé)

Le résultat 8) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}$$

$$E_x = \rho_{xx} \, j_x + \rho_{xy} \, j_y$$

$$0 = \rho_{yx} \, j_x + \rho_{yy} \, j_y$$

d'où l'existence d'un j_y $\left(j_y = - \frac{\rho_{yx}}{\rho_{yy}} j_x \right)$

d'où la modification de la relation entre j_x et E_x

$$E_x = \frac{\rho_{xx}\rho_{yy} - \rho_{xy}\rho_{yx}}{\rho_{yy}} \, j_x$$

$$\boxed{E_x = \frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma^2 B^2}{n^2 e^2} \right) j_x}$$

(au lieu de

$$E_x = \frac{1}{\gamma} \qquad j_x \;)$$

la démonstration pour la résistance est la même . On trouve donc

$$R = \frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{\gamma^2 B^2}{n^2 e^2}\right) \frac{L}{a\ell}$$

$$\boxed{R = R_o \left(1 + \underbrace{\frac{\gamma^2 B^2}{n^2 e^2}}\right)}$$

↑ variation relative de R à cause de B

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R_o} = \frac{R - R_o}{R_o} = \frac{\gamma^2 B^2}{n^2 e^2}}$$

A.N.

$$= \frac{100^2 \; 1}{(10^{24})^2 \; (1{,}6 \; 10^{-19})^2}$$

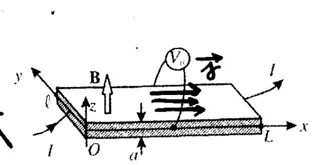
$$\boxed{\frac{\Delta R}{R_o} = 0{,}39 \; 10^{-6} \quad \text{ou} \quad 0{,}000039 \,\%}$$

l' effet de magnétorésistance est extrêmement faible.

---

10)

V_H ↖



avec $\ell \ll L$ les faces $y = 0$ et $y = \ell$ sont "proches" et imposent les lignes de courant. Le courant n'est pas modifié.

Le résultat 8) s'écrit

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_x = \rho_{xx} \; j_x$$

$$E_y = \rho_{yx} \; j_x$$

d'où l'existence d'un E_y $(E_y = \rho_{yx} \; j_x)$

$$\boxed{E_y = -\frac{B}{ne} \; j_x}$$

selon y apparait une ddp

$$\int_{y=0}^{y=\ell} dV = -\int_0^{\ell} E_y \, dy$$

$$\underbrace{V(\ell) - V(0)}_{\text{noté } V_H} = \frac{B}{ne} j_x \ell$$

avec $j_x = \dfrac{I}{a\ell}$

$$\boxed{V_H = B \frac{I}{nea}}$$

A.N.

$$= \frac{1 \quad 10^{-3}}{10^{24} \quad 1{,}6\ 10^{-19} \quad 10\ 10^{-6}}$$

$$\boxed{V_H = 0{,}625 \text{ mV}}$$

L' effet Hall est donc plus facile à mettre en évidence que l' effet de magnétorésistance.

Ce dispositif permet de mesurer B (teslamètre à effet Hall)

---

11)

$$n = p \frac{eB}{ah}$$

$$R_t = \frac{V_H}{I} = \frac{B}{nea}$$

$$\boxed{R_t = \frac{h/e^2}{p}}$$

A.N.

$$R_K = h/e^2$$

$$= \frac{6{,}626\ 10^{-34}}{(1{,}6\ 10^{-19})^2}$$

$$\boxed{R_K = 25{,}9\ 10^3 \text{ k}\Omega}$$

Cette résistance s'exprime en fonction de h et e, des constantes fondamentales en physique

---