Corrigé du DM n°8

1 Mesure de conductivité d'après Mines PSI

1. On utilise la conservation du flux de $\overrightarrow{j}$ en régime stationnaire. L'intensité i qui arrive par le file Az doit être égale à celle qui traverse un cylindre $\mathcal{C}$ de révolution d'axe Az, de rayon r et de hauteur ε. On en déduit que :

$$i = \iint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{j}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{S} j(r)\,\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{e_r}\,\mathrm{d}S = j(r)\,2\pi r\,\varepsilon$$

d'où :

$$\boxed{j(r) = \frac{i}{2\pi\varepsilon\, r}}$$

Le conducteur étant ohmique, on a :

$$\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{j}}{\gamma} = \frac{i}{2\pi\varepsilon\gamma\, r}\,\overrightarrow{e_r}$$

et comme en régime permanent, $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, on en déduit en utilisant le gradient en coordonnées cylindriques que V ne dépend que de r et que :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{i}{2\pi\varepsilon\gamma\, r} \implies V(r) = -\frac{i}{2\pi\varepsilon\gamma}\,\ln(r) + C$$

où C est une constante. Il vient donc :

$$\boxed{V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi\varepsilon\gamma}\,\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

2. En remettant le contact en D il y a superposition :
   - de la densité de courant $\overrightarrow{j}$ déjà calculée en supprimant le contact en D ;
   - de la densité de courant $\overrightarrow{j'}$ que l'on obtiendrait en supprimant le contact en A. Par analogie avec la calcul précédent, elle s'écrit :

$$\overrightarrow{j'} = -\frac{i}{2\pi\varepsilon\gamma\, r'}\,\overrightarrow{e_r}$$

ce qui donne un champ électrique total qui est la superposition des champs électriques liés à $\overrightarrow{j}$ et à $\overrightarrow{j'}$ et donc une différence de potentiel totale qui est aussi la somme des différences de potentiel associées à chacune de ces deux situations. On a donc :

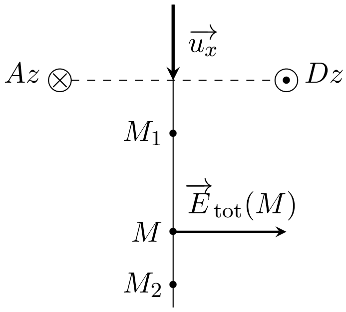
$$\boxed{V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi\varepsilon\gamma}\,\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - \frac{i}{2\pi\varepsilon\gamma}\,\ln\left(\frac{r'_2}{r'_1}\right)}$$

En particulier, si M_1 et M_2 sont sur la médiatrice du segment AD, nous avons $r_1 = r'_1$ et $r_2 = r'_2$, ce qui entraîne :

$$\boxed{V(M_1) - V(M_2) = 0}$$

Ceci n'est pas étonnant car le plan contenant cette médiatrice et parallèlle aux axes Az ou Dz est un plan d'antisymétrie des courants et donc du champ électrique puisque $\overrightarrow{E}_{\text{tot}} = \gamma\,\overrightarrow{j}_{\text{tot}}$. En tout point M de cette médiatrice, on a donc : $\overrightarrow{E}_{\text{tot}}(M)\perp\overrightarrow{u_x}$. Le théorème de la circulation entraîne donc que :

$$V(M_1) - V(M_2) = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{E}_{\text{tot}}(M).\mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{u_x} = 0$$



3. Cela correspond à la situation où $r_1 = a$, $r_2 = \ell - a$, $r'_1 = \ell - a$ et $r'_2 = a$. On obtient donc :
$$V_A - V_D = \frac{i}{\pi\varepsilon\gamma}\ \ln\left(\frac{\ell - a}{a}\right) \approx \frac{i}{\pi\varepsilon\gamma}\ \ln\left(\frac{\ell}{a}\right) \quad \text{si} \quad \ell \gg a$$
On reconnaît la loi d'Ohm et on peut définir une résistance :
$$\boxed{R = \frac{1}{\pi\varepsilon\gamma}\ \ln\left(\frac{\ell}{a}\right)}$$

4. A.N. : $R = 5{,}3.10^{-2}\,\Omega$. Il s'agit d'une résistance très petite et elle ne doit pas être facile à mesurer. De plus, elle doit dépendre fortement de la valeur de a qui doit être connue et contrôlée avec précision.
5. La configuration est maintenant telle que :
$$r_1 = \ell\ \ ;\ \ r_2 = \sqrt{2}\ell\ \ ;\ \ r'_1 = \sqrt{2}\ell \quad \text{et} \quad r'_2 = \ell$$
ce qui donne :
$$\boxed{V_P - V_Q = \frac{i}{\pi\varepsilon\gamma}\ \ln(\sqrt{2}) \iff R_{//} = \frac{1}{\pi\varepsilon\gamma}\ \ln(\sqrt{2}) \overset{AN}{=} 5{,}0.10^{-3}\,\Omega}$$
On s'est donc bien affranchi de la valeur exacte de a mais la petitesse de $R_{//}$ rend néanmoins encore les mesures délicates.