DM n°9
Pour le vendredi 22 décembre 2023

1 Interaction entre dipôles électrostatiques

Dans tout l'exercice, on envisage des situations dans un plan qui est ramené au repère (Oxy). On donne : $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}.

1. Deux molécules (1) et (2) possèdent des moments dipolaires permanents $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$. La première est supposée fixe en O, son moment étant dirigé selon $\overrightarrow{u_x}$: $\overrightarrow{p_1} = p_1\,\overrightarrow{u_x}$. La seconde molécule (2) est placée en un point M de coordonnées polaires (r, θ_1). On notera $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_1})$ la base polaire locale associée à M. On supposera dans toute la suite que $\theta_1 \in [0, \pi/2]$.

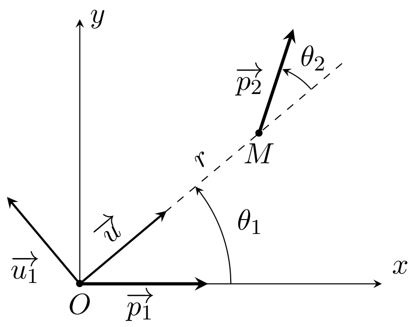


Figure 1 –

   a) Expliciter dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_1})$ le champ électrique $\overrightarrow{E_1}(M)$ créé par $\overrightarrow{p_1}$ au point M.
   b) En déduire l'énergie potentielle électrique E_{p2} de la molécule (2) placée dans ce champ. On exprimera E_{p2} en fonction (entre autres) de θ_1 et θ_2.
   c) On suppose dans cette question que $\overrightarrow{p_2}$ ne peut que pivoter autour de M, sans se déplacer. Déterminer l'angle d'équilibre θ_{2e} que fait $\overrightarrow{p_2}$ avec $\overrightarrow{OM}$. On montrera que :

$$\tan\theta_{2e} = \frac{\tan\theta_1}{2}$$

   Application numérique : calculer θ_{2e} pour $\theta_1 = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$.
   d) Montrer que dans la configuration d'équilibre de la question précédente, $\overrightarrow{p_2}$ est aligné avec le champ électrique $\overrightarrow{E_1}(M)$.

2. On suppose dans cette question que l'angle θ_2 est égal à sa valeur d'équilibre : $\theta_2 = \theta_{2e}$. On étudie l'évolution de l'énergie potentielle de la molécule (2) en fonction de sa position angulaire θ_1, en considérant que r reste constant.
   a) Montrer que E_{p2} peut se mettre sous la forme :

$$E_{p2} = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta_1}$$

   Pour quelle valeur de θ_1 cette énergie est-elle minimale ?

   On suppose que la molécule (2) vient se placer spontanément dans cette position angulaire.
   b) Quelle est alors la force $\overrightarrow{F}$ subie par $\overrightarrow{p_2}$? Est-elle attractive ou répulsive ? Application numérique : deux molécules d'eau de moments dipolaires $p_1 = p_2 = 1{,}85$ D sont distantes de 300 pm. Calculer $\|\overrightarrow{F}\|$.

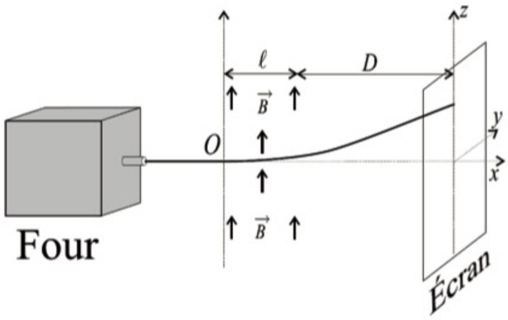
2 Expérience de Stern et Gerlach

Données :

Masse molaire : M(Li) = 6,9 g.mol^{-1} ;
Constante d'Avogadro : $N_A = 6{,}02.10^{23}$ mol^{-1} ;
Masse de l'électron : $m_e = 9{,}11.10^{-31}$ kg ;
Charge élémentaire : $e = 1{,}60.10^{-19}$ C ;
Constante de Planck réduite : $\hbar = h/2\pi = 1{,}055.10^{-34}$ kg.m^2.s^{-1}.

Dans une enceinte, où règne une faible pression, est placé un four contenant du lithium porté à la température T. Le lithium se vaporise et le gaz d'atomes obtenu se comporte comme un gaz parfait monoatomique à la température T. Un ensemble d'ouvertures pratiquées dans le four permet d'obtenir un jet d'atomes de lithium. On suppose que ce jet est monocinétique, ce qui signifie que, à la sortie du four, les atomes ont tous la même énergie cinétique $E_c = 1{,}6.10^{-20}$ J.

On supposera qu'en sortie du four $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$. Le poids des atomes de lithium est négligeable dans toute cette expérience.



1) Calculer v_0.

En sortie du four, le jet d'atomes de lithium passe dans une région ou règne un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B(z)\,\overrightarrow{e_z}$ tel que $B(z) = a\,z$ où a est une constante positive (voir Figure). On admet que cette région est de largeur ℓ et qu'en dehors de celle-ci le champ magnétique est négligeable. On constate que le jet est dévié et que son impact sur un écran situé à l'abcisse $d = \ell + D$ se situe à une cote z_0 non nulle.

Cette déviation est explicable par le fait que les atomes de lithium sont porteurs de moments dipolaires magnétiques $\overrightarrow{M}$ constants et que dans la zone où règne le champ magnétique, ils sont soumis à une force magnétique dérivant de l'énergie potentielle $E_p = -\overrightarrow{M}.\overrightarrow{B}$.

2) Après avoir exprimé cette force, établir en fonction de a, $M_z = \overrightarrow{M}.\overrightarrow{e_z}$ et de E_c la relation entre z et x décrivant la trajectoire d'un atome dans la région où règne le champ magnétique linéaire.

3) Exprimer la cote z_0 en fonction de D, ℓ, E_c, a et M_z.

4) On observe en fait sur l'écran deux taches symétriques par rapport à Ox. Que peut-on en déduire ?

5) On donne : $E_c = 1{,}6.10^{-20}$ J, $a = 10$ T.m^{-1}, $\ell = 10$ cm et $D = 10$ m. On observe $z_0 = \pm$ 3 mm. Calculer les deux valeurs de la composante M_z du moment magnétique des atomes de lithium.

Cette expérience réalisée par les physiciens OTTO STERN et WALTHER GERLACH en 1921 a permis de mettre en évidence la quantification du moment cinétique de spin des atomes étudiés (et a valu le prix Nobel de physique à OTTO STERN en 1943).

6) On admet que le moment magnétique de l'atome de lithium est dû à son unique électron de valence. Celui-ci possède un moment cinétique interne $\overrightarrow{S}$ dit de "rotation propre" et appelé *spin.* À ce spin correspond un moment magnétique :

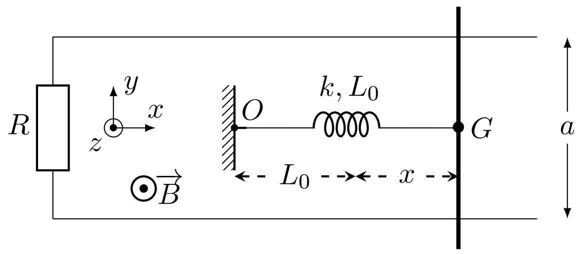
$$\overrightarrow{M} = -\,2{,}000232\frac{e}{2m_e}\,\overrightarrow{S}$$

Déterminer les deux valeurs possibles de la composante S_z en posant $S_z = \alpha\,\hbar$: on déterminera les deux valeurs numériques de α.

3 Rail de Laplace avec un ressort

Une tige de masse m peut glisser sans frottements sur des rails parallèles, distants de a, le tout étant contenu dans un plan (Oxy) horizontal. On note R la résistance électrique du circuit et on néglige son inductance propre. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique constant $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$. La tige est reliée à un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0. On note x l'écart de la position de la tige par rapport à la longueur à vide du ressort. À l'instant initial, cet écart est égal à $x_0 > 0$ et la tige est lâchée sans vitesse initiale.

On néglige les frottements de la tige sur les rails.



1. Expliquer qualitativement ce qui va se produire à partir du moment où la tige sera lâchée.
2. Établir l'équation électrique (EE) du circuit.
3. Établir l'équation mécanique (EM) du dispositif.
4. En déduire l'équation différentielle (ED) vérifiée par l'abscisse x de la barre et la mettre sous la forme :
$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$
en donnant les expressions de τ et ω_0.
5. On suppose $\omega_0\tau \gg 1$. Montrer que $x(t) \simeq x_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)\cos(\omega_0 t)$ et tracer l'allure de $x(t)$.
6. Effectuer un bilan de puissance et justifier l'égalité $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} Ri^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2}kx_0^2$. Interpréter son sens physique.