

DS n°4 bis Centrale - Mines
Samedi 16 décembre 2023 – Durée 4 heures

1 À propos de champs magnétiques

Donnée générale pour tout le problème

Perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) de vecteurs de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, pour tout champ vectoriel $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{e}_z$, on donne :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

et

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Partie I – Réalisation d'un champ magnétique uniforme

On considère un solénoïde cylindrique de longueur ℓ comportant N spires jointives identiques, circulaires de rayon R . Ce solénoïde est parcouru par un courant d'intensité I constante.

1. On se place dans le cadre de l'approximation du solénoïde infini. Établir l'expression du champ magnétique \vec{B} créé par le solénoïde à l'intérieur de celui-ci. On pourra admettre que le champ extérieur est nul.

Une autre méthode classique de production d'un champ magnétique uniforme est l'utilisation des bobines de HELMHOLTZ. Les questions suivantes vont permettre d'explicitier leurs caractéristiques.

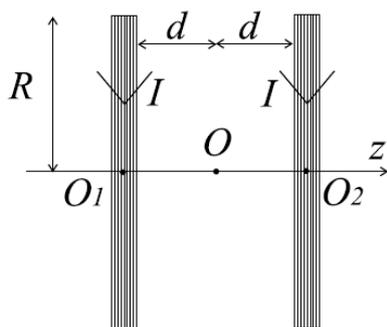


Figure 1 : Bobines de HELMHOLTZ

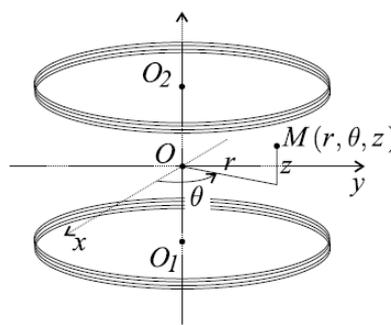


Figure 2 : Coordonnées cylindriques

On considère le montage de la Figure 1 constitué de deux bobines plates d'épaisseur négligeable, composées chacune de N spires circulaires de rayon R , de même axe de symétrie Oz . Ces deux bobines ont pour centres de symétrie respectifs O_1 et O_2 et elles sont parcourues par des courants identiques d'intensité I constante. Les extrémités de ces bobines sont séparées d'une distance $2d$. La configuration d'HELMHOLTZ est obtenue lorsque $d = R/2$.

On note \vec{B}_h le champ magnétique créé par la configuration d'Helmholtz et $(B_{hr}, B_{h\theta}, B_{hz})$ les composantes de \vec{B}_h dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ des coordonnées cylindriques (voir Figure 2).

2. Justifiez que $B_{h\theta} = 0$, $B_{hr} = B_{hr}(r, z)$, $B_{hz} = B_{hz}(r, z)$ et que la fonction $B_{hz}(r, z)$ est paire par rapport à la coordonnée z .

On montre qu'en un point M situé sur l'axe Oz , à l'abscisse z , le champ magnétique $\vec{B}_h(z)$ créé par les bobines d'Helmholtz s'écrit :

$$\vec{B}_h(z) = N \vec{B}_0 \left\{ \left[1 + \left(\frac{z}{R} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\frac{z}{R} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\}$$

3. La quantité $B_0 = \|\vec{B}_0\|$ s'exprime en fonction de μ_0 , R et I . Par comparaison avec d'autres champs magnétiques, choisir en justifiant précisément ce choix, l'expression de B_0 parmi les suivantes :

$$B_0 = \frac{\mu_0 R}{2I} ; B_0 = \frac{\mu_0 I R}{2} ; B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} ; B_0 = \frac{IR}{2\mu_0}$$

4. Les bobines ont un rayon $R = 15$ cm. On donne le développement limité suivant :

$$\left[1 + \left(X \pm \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} = \frac{8}{5\sqrt{5}} \left[1 \mp \frac{6}{5}X \pm \frac{32}{25}X^3 - \frac{144}{125}X^4 + o(X^4) \right]$$

En déduire l'expression approchée $\vec{B}_h(z)$ au voisinage de $z = 0$.

Dans quelle zone située sur l'axe Oz , peut-on considérer que la variation relative de la norme du champ magnétique est inférieure à 2%? Préciser la valeur numérique de cette norme sachant que $N = 50$ spires et $I = 4$ A.

5. Le fil conducteur utilisé est du cuivre de conductivité $\gamma = 6.10^7$ S.m⁻¹ avec une section carrée de côté $a = 2$ mm. Calculer la longueur totale de fil utilisé dans les bobines de Helmholtz, la résistance électrique de ce fil ainsi que la puissance dissipée par effet JOULE avec les valeurs numériques de la question 4. On rappelle que la résistance d'un fil de conductivité γ , de longueur ℓ et de section S est donnée par $R = \frac{\ell}{\gamma S}$.

6. On s'intéresse maintenant à l'expression de \vec{B}_h au voisinage de l'axe Oz (mais pas sur l'axe). Un développement limité des deux composantes B_{hz} et B_{hr} s'écrit :

$$B_{hz}(r, z) = b_0(z) + r b_1(z) + r^2 b_2(z) + o(r^2) \quad \text{et} \quad B_{hr}(r, z) = c_0(z) + r c_1(z) + r^2 c_2(z) + o(r^2)$$

On se place dans la région au voisinage de O , de sorte que l'expression approchée de $B_h(z)$ (sur l'axe Oz) déterminée à la question 4. soit valable.

Que valent les fonctions $b_0(z)$ et $c_0(z)$?

En utilisant les équations de Maxwell, montrer que $b_1(z) = 0$, $c_1(z) = -\frac{1}{2} \frac{db_0}{dz}(z)$ et $c_2(z) = -\frac{1}{4} \frac{d^2 b_0}{dz^2}(z)$.

7. Applications numériques. On reprend les données numériques de la question 4. en y ajoutant $r = 1$ cm. Calculer $B_{hr}(r, 0)$ et $B_{hr}(r, z = 1$ cm). Conclure.

Partie II – Mesure des caractéristiques d’une boussole

Une boussole est formée d’un aimant permanent, solide en forme d’aiguille équivalente à un petit dipôle magnétique \vec{m} de norme constante m , la direction du vecteur \vec{m} étant indiquée sur la Figure 3. Sur cette figure, le vecteur \vec{m} a été volontairement placé à côté de la boussole pour plus de lisibilité. En réalité on le placera au centre de la boussole.

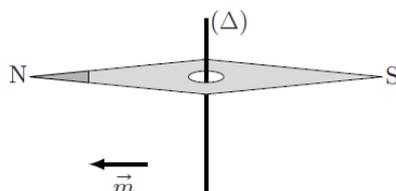


Figure 3

Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d’un axe (Δ) formant une liaison pivot à faible frottement.

Les interactions d’un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire \vec{m} soumis à un champ magnétique extérieur \vec{B} sont décrites par l’énergie potentielle $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ et par le couple des actions électromagnétiques $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

8. La boussole est placée en O dans le dispositif des bobines de Helmholtz étudié dans la partie I., l’axe (Δ) étant confondu avec l’axe Ox de la figure 2. Quelle est la position d’équilibre stable de la boussole ?
9. On note J le moment d’inertie de l’aiguille aimantée relativement à son axe de rotation (Δ) . Légèrement écartée de sa position d’équilibre stable, l’aiguille aimantée oscille avec une période τ_{osc} . Déterminer la relation entre τ_{osc} , J , m , N et B_0 .
10. La valeur mesurée de la période des petites oscillations de l’aiguille aimantée est $\tau_{\text{osc}} = 0,30$ s avec $N = 50$ spires, $I = 4$ A et $R = 15$ cm. Déterminer l’unité et calculer la valeur numérique du rapport $\kappa = m/J$ pour cette boussole.

Partie III. – Principe du moteur synchrone

On retire les bobines de Helmholtz et on place la boussole de la partie précédente dans un nouveau champ magnétique $\vec{B}(O, t)$ défini par :

$$\vec{B}(O, t) = B_0 \left[\cos \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4} \right) \vec{e}_z + \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4} \right) \vec{e}_y \right]$$

où B_0 est une constante et où O correspond au centre de la boussole, cette dernière pouvant librement tourner autour de l’axe (Ox) .

11. Montrer que la norme de $\vec{B}(O, t)$ est constante. Expliciter l’angle que fait le vecteur $\vec{B}(O, t)$ avec \vec{e}_y et conclure sur la caractéristique du champ magnétique ainsi produit en O . Proposer un montage qui permettrait de générer un tel champ magnétique.

On donne à l’aiguille un mouvement de rotation autour de (Δ) avec une vitesse angulaire ω , de sorte que l’angle $\beta(t) = (\vec{e}_y, \vec{m})$ s’écrive $\beta(t) = \omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha$ à l’instant t , avec $\alpha \in] -\pi, \pi]$.

12. a) Calculer la valeur du couple $\vec{\Gamma}(t)$ exercé par le champ magnétique sur la boussole.
 b) À quelle condition sur ω sa valeur moyenne au cours du temps $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ est-elle non nulle? Lorsque cette condition est réalisée, donner l'expression de $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ en fonction de α , B_0 et m .

On suppose que la condition sur ω est réalisée dans la suite du problème. Comme le champ magnétique tourne à une fréquence élevée, on admettra que seule la valeur moyenne $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ du couple intervient pour étudier la rotation de la boussole.

- c) En déduire pour quelles valeurs de α ce dispositif fonctionne en moteur, c'est à dire lorsque l'action du champ magnétique est d'entraîner une rotation de l'aiguille dans le même sens.
13. En pratique, la constance de la vitesse angulaire ω de l'aiguille est assurée par les frottements sur son axe de rotation (Ox). Ces frottements solides créent un couple résistant $\vec{\Gamma}_r$ constant, dont on supposera la norme égale à $\Gamma_r = \frac{mB_0}{2}$, qui contrebalance le couple des actions électromagnétiques.

- a) Représenter $\langle \vec{\Gamma} \rangle \cdot \vec{e}_x$ en fonction de α , pour α variant dans la zone où le dispositif fonctionne en moteur.

Faire figurer les deux points de fonctionnement possibles sur ce schéma, qui assurent que la vitesse angulaire ω de la boussole reste constante en régime permanent. Préciser les valeurs α_1 et α_2 correspondantes.

- b) Un expérimentateur curieux freine la rotation de l'aiguille à l'aide d'un stylo pendant une fraction de seconde, puis laisse le système évoluer à nouveau sous l'effet du couple électromagnétique moyen et des frottements. Montrer que seule une des deux valeurs de α précédentes permet à la boussole de reprendre sa rotation à la vitesse angulaire ω_0 à la suite de cette perturbation. *On dit que le fonctionnement moteur est stable dans ce cas.*

Partie IV – Pôles géographiques et magnétiques

Données numériques

Champ magnétique terrestre à l'équateur	$B_E = 3,0 \times 10^{-5}$ T
Rayon terrestre	$R_T = 6,4 \times 10^3$ km

Les pôles géographiques sont assez proches des pôles magnétiques. Dans tout ce qui suit, on pourra confondre les deux axes reliant les pôles opposés de chaque type. La recherche des pôles magnétiques s'est d'abord appuyée sur la mesure du champ magnétique terrestre (ou champ géomagnétique), et en particulier de sa direction. L'intensité croissante du champ géomagnétique à l'approche des pôles contribue enfin à expliquer un phénomène optique spectaculaire : les aurores polaires.

Coordonnées sphériques et géographiques

On notera ($Oxyz$) les axes cartésiens associés à la base orthonormée et directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les coordonnées sphériques d'un point P sont notées (r, θ, φ) avec la base locale associée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, cf. fig. 4 à gauche. On note aussi φ (longitude) et λ la latitude d'un point P de la surface terrestre; le point A est situé sur l'équateur dans le méridien origine ($\varphi = 0$); celui-ci passe par l'observatoire de Greenwich G , cf. fig. 4 à droite.

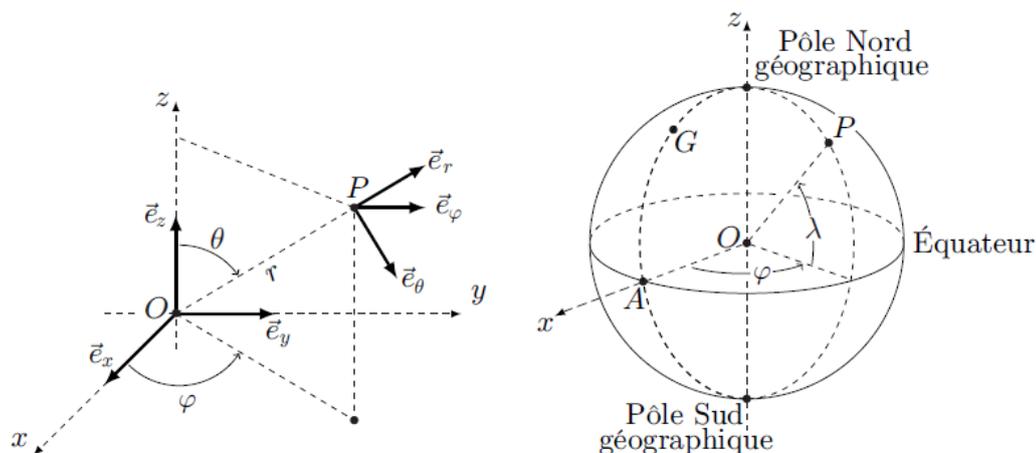


Figure 4 Coordonnée sphériques et géographiques

Donnée relative à un dipôle magnétique

Le champ magnétique créé par un dipôle de moment dipolaire \vec{M} placé à l'origine O des coordonnées est donné au point P par :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R^2 \vec{M}}{R^5} \quad \text{où } \vec{R} = \vec{OP} \quad \text{et } R = \|\vec{R}\|$$

14. Pourquoi une boussole à l'équilibre indique-t-elle le nord ? Cet équilibre est-il stable ?

On étudie un modèle de champ géomagnétique créé par un dipôle magnétique $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ disposé au centre O de la Terre (assimilée à une sphère de rayon R_T), l'axe (Oz) étant l'axe polaire géographique dirigé du pôle sud de cet axe vers son pôle nord (cf. fig. 4). On rappelle d'une part qu'un point de la surface est caractérisé par ses coordonnées géographiques φ (longitude) et $\lambda = \pi/2 - \theta$ (latitude) et d'autre part qu'à l'équateur le champ magnétique terrestre est horizontal, dirigé vers le pôle nord géographique et y a pour intensité B_E .

15. Exprimer, en un point de la surface de la Terre et en coordonnées sphériques, le champ géomagnétique en fonction de μ_0 , M_0 et R_T .
16. Préciser le signe de M_0 puis estimer sa valeur numérique. Quelles sont la direction et l'intensité du champ géomagnétique aux pôles magnétiques nord et sud ?

En un point P de la surface terrestre, on appelle nord magnétique local la direction \vec{e}_N du champ géomagnétique, projeté dans le plan horizontal, et déclinaison magnétique l'angle D formé par \vec{B} avec le nord magnétique local ; la déclinaison magnétique est positive si \vec{B} est dirigé vers le haut (vers le ciel) et négative s'il est dirigé vers le bas (vers le sol).

17. Dans l'hémisphère nord, quel est le signe de D ? Calculer $\tan(D)$ en fonction de la latitude λ puis tracer l'allure de la courbe donnant D en fonction de λ pour toutes les valeurs de λ du pôle sud au pôle nord. Pourquoi lisait-on parfois que les boussoles "s'affolent à proximité des pôles" ? Peut-on déterminer, au moyen d'une boussole, si on se trouve dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud ?

FIN DU DEVOIR