

Corrigé du DS n°4 bis Centrale - Mines

1 À propos de champs magnétiques. D'après Mines Ponts PSI 2016 et MP 2019

Partie I – Réalisation d'un champ magnétique uniforme

1. Voir le cours
2. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie des courants, donc un plan de symétrie de \vec{B} contenant M . Le champ magnétique en M appartient donc à ce plan de symétrie ce qui implique $B_\theta = 0$.

De plus, il y a invariance de la distribution de courant par toute rotation autour de Oz , ce qui entraîne que les fonctions B_{hr} et B_{hz} ne dépendent pas de l'angle θ .

Enfin, le plan $(Oxy) \perp Oz$ est un plan de symétrie des courants, donc un plan d'antisymétrie de \vec{B} . Si $M(r, \theta, z)$ et $M'(r, \theta, -z)$ sont deux points symétriques par rapport à ce plan, alors :

$$\vec{B}_h(M') = -\text{sym}_{Oxy} \vec{B}_h(M)$$

d'où :

$$B_{rh}(r, -z) \vec{e}_r + B_{hz}(r, -z) \vec{e}_z = - [B_{rh}(r, z) \vec{e}_r - B_{hz}(r, z) \vec{e}_z]$$

Il en résulte que (projection sur \vec{e}_z) $B_{hz}(r, -z) = B_{hz}(r, z)$. La fonction $B_{hz}(r, z)$ est bien paire par rapport à la coordonnée z .

On montre qu'en un point M situé sur l'axe Oz , à l'abscisse z , le champ magnétique $\vec{B}_h(z)$ créé par les bobines d'Helmholtz s'écrit :

$$\vec{B}_h(z) = N \vec{B}_0 \left\{ \left[1 + \left(\frac{z}{R} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\frac{z}{R} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\}$$

3. Le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant I est donné par (théorème d'Ampère) : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$. Par analogie dimensionnelle, la quantité $B_0 = \|\vec{B}_0\|$ est donc donnée par :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

4. On pose $X = z/R$. Les termes en X et en X^3 se compensent et il ne reste dans le développement limité que :

$$\vec{B}_h(z) = NB_0 \frac{8}{5\sqrt{5}} \left[2 - \frac{288}{125} \frac{z^4}{R^4} \right] \vec{e}_z$$

(Sur l'axe (Oz) , le champ magnétique est bien sûr colinéaire à \vec{e}_z car si M est sur cet axe, le plan $(M, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est un autre plan d'antisymétrie des courants de sorte que $B_{rh} = 0$).

En O , $z = 0$ et on a donc :

$$B_h(z = 0) = NB_0 \frac{8}{5\sqrt{5}} \times 2$$

Il s'ensuit que la variation relative du $B_h(z)$ au voisinage de $z = 0$ s'écrit :

$$\left| \frac{B_h(z) - B_h(0)}{B_h(0)} \right| = \frac{144}{125} \frac{z^4}{R^4} < 2/100$$

ce qui implique :

$$|z| < R \left(\frac{125}{72 \times 100} \right)^{1/4} \stackrel{AN}{=} 5,4 \text{ cm}$$

Il s'agit donc d'une zone relativement étendue de part et d'autre de O .

On calcule $B_h(z=0) = NB_0 \frac{16}{5\sqrt{5}} = 1,2 \text{ mT}$

5. Il y a N tours de fil par bobine donc $2N$ tours de fil au total. La longueur totale de fil est donc $2N \times 2\pi R = 94 \text{ m}$ et la résistance totale du fil est donc :

$$R_{\text{tot}} = \frac{2N \times 2\pi R}{\gamma a^2} = 0,39 \Omega$$

On en déduit que la puissance dissipée par effet Joule dans les deux bobines s'écrit :

$$P_J = R_{\text{tot}} I^2 \approx 6 \text{ W}$$

6. Manifestement $b_0(z) = B_h(z)$ (valeur sur l'axe Oz) et $c_0(z) = 0$ puisque la composante radiale de \vec{B}_h s'annule sur l'axe.

En utilisant $\text{div} \vec{B}_h = 0$ on obtient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 c_1(z) + r^3 c_2(z) + \dots)}{\partial r} + \frac{\partial(B_h + r b_1(z) + r^2 b_2(z) + \dots)}{\partial z} = 0$$

donc, en regroupant les termes en puissances de r , il vient :

$$2c_1(z) + \frac{dB_h}{dz} + r \left(\frac{db_1}{dz} + 3c_2(z) \right) + \dots = 0$$

expression dans laquelle le $+\dots$ représente des sommes de termes faisant intervenir des puissances de r supérieures ou égales à 2. Cette équation devant être vérifiée pour tout r (à condition bien sûr que r soit suffisamment petit), on en tire les deux équations ci-dessous :

$$c_1(z) = -\frac{1}{2} \frac{dB_h}{dz}(z) \quad \text{et} \quad \frac{db_1}{dz} + 3c_2(z) = 0 \quad (1)$$

De même, en utilisant $\text{rot} \vec{B}_h = \vec{0}$, équation de Maxwell-Ampère valable dans une région de l'espace située en dehors des courants ($\vec{j} = \vec{0}$), on obtient en projetant l'équation sur \vec{e}_θ :

$$\frac{\partial B_{hr}}{\partial z} - \frac{\partial B_{hz}}{\partial r} = 0 \iff \frac{\partial(r c_1(z) + r^2 c_2(z) + \dots)}{\partial z} - \frac{\partial(B_h(z) + r b_1(z) + r^2 b_2(z) + \dots)}{\partial r} = 0$$

d'où, en regroupant à nouveau les termes par puissance croissante de r , et en négligeant les termes de degré supérieur ou égal à 2 en r , on aboutit à :

$$-b_1(z) + r \left(\frac{dc_1}{dz}(z) - 2b_2(z) \right) + \dots = 0$$

Cette équation étant à nouveau valable pour tout r , il en résulte que :

$$b_1(z) = 0 \quad \text{et} \quad b_2(z) = \frac{1}{2} \frac{dc_1}{dz}(z) \quad (2)$$

Finalement, les équations (1) et (2) conduisent aux résultats suivants :

$$b_1(z) = 0 \quad ; \quad c_1(z) = -\frac{1}{2} \frac{dB_h}{dz}(z) \quad ; \quad b_2(z) = \frac{1}{2} \frac{dc_1}{dz}(z) = -\frac{1}{4} \frac{d^2B_h}{dz^2}(z) \quad \text{et} \quad c_2(z) = 0$$

7. Applications numériques. Les résultats de la question précédente conduisent à écrire que :

$$B_{rh}(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_h}{dz}(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2B_h}{dz^2}(z) \quad \text{avec} \quad B_h(z) = \frac{\mu_0 NI}{2R} \frac{8}{5\sqrt{5}} \left[2 - \frac{288}{125} \frac{z^4}{R^4} \right]$$

Il s'ensuit que :

- $B_{rh}(r, 0) = 0$. On retrouve bien que la composante radiale est nulle en O (en effet, d'après Q.2, $B_{rh}(r, z)$ est impaire par rapport à z).
- En $z = 1$ cm, on calcule tout d'abord la valeur numérique du terme du premier ordre en r :

$$B_{hr}^{(1)}(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_h}{dz}(z) = \frac{r}{2} \frac{\mu_0 NI}{2R} \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{288 \times 4}{125} \frac{z^3}{R^4}$$

Pour $r = z = 1$ cm, on trouve $B_{hr}^{(1)} = 5,5 \times 10^{-5}$ mT.

On calcule ensuite la composante du second ordre en r :

$$B_{hr}^{(2)}(r, z) = -\frac{r^2}{4} \frac{d^2B_h}{dz^2}(z) = \frac{r^2}{4} \frac{\mu_0 NI}{2R} \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{288 \times 4 \times 3}{125} \frac{z^2}{R^4} = \frac{3r}{2z} B_{hr}^{(1)}(r, z)$$

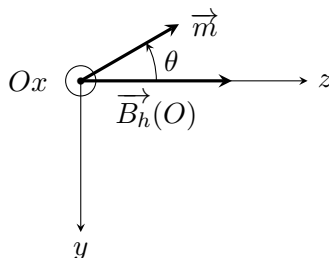
qui pour $r = z = 1$ cm est légèrement plus élevée que $B_{hr}^{(1)}(r, z)$. Numériquement on obtient : $B_{hr}^{(2)}(r, z) = 8,25 \times 10^{-5}$ mT. Finalement, en ajoutant les deux termes, on obtient :

$$B_{hr}(r, z) \approx 1,4 \times 10^{-4} \text{ mT} \ll 1,2 \text{ mT}$$

On peut donc conclure que la composante radiale de \vec{B} est nulle ou bien négligeable devant la composante longitudinale B_{hz} . Autour du point O , le champ magnétique est donc quasiment dirigé selon \vec{e}_z en tout point.

Partie II – Mesure des caractéristiques d'une boussole

8. C'est lorsque le moment magnétique \vec{m} est colinéaire au champ magnétique $\vec{B}(O)$ et de même sens. \vec{m} est donc dirigé selon $+\vec{e}_z$ (en supposant $I > 0$).
9. On a le schéma suivant :



On a :

$$\vec{m} = m (\cos \theta \vec{e}_z - \sin \theta \vec{e}_y) \quad \text{donc} \quad \vec{\Gamma} = -mNB_0 \frac{16}{5\sqrt{5}} \sin \theta \vec{e}_x$$

Le théorème du moment cinétique (TMC) appliqué à la boussole donne alors, dans la limite des petits mouvements où $\sin \theta \approx \theta$:

$$J\ddot{\theta} = -mNB_0 \frac{16}{5\sqrt{5}} \theta \quad \text{donc} \quad \ddot{\theta} + \frac{16mNB_0}{5\sqrt{5}J} \theta = 0$$

Il s'agit d'un oscillateur harmonique de période propre :

$$\tau_{\text{osc}} = 2\pi \sqrt{\frac{5\sqrt{5}J}{16mNB_0}}$$

10. On sait que $[m] = \text{A.m}^2$ et $J = \text{kg.m}^2$. On en déduit que $[\kappa] = \text{A.kg}^{-1}$. On a d'autre part :

$$\kappa = \frac{4\pi^2}{\tau_{\text{osc}}^2} \frac{5\sqrt{5}}{16NB_0} \stackrel{AN}{=} 3,6 \times 10^5 \text{ A.kg}^{-1}$$

Partie III. – Principe du moteur synchrone

11. Si on remarque que :

$$\cos\left(\omega_0 t \pm \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\omega_0 t) \frac{1}{\sqrt{2}} \mp \sin(\omega_0 t) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

on obtient :

$$\|\vec{B}(O, t)\|^2 = \frac{B_0^2}{2} [(\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t))^2 + (\cos(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t))^2] = B_0^2$$

et, en notant $\varphi(t)$ l'angle que fait le vecteur $\vec{B}(O, t)$ avec \vec{e}_y à l'instant t , on a :

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{\pi}{4}$$

On peut donc écrire plus simplement :

$$\vec{B}(O, t) = B_0 [\sin(\varphi) \vec{e}_z + \cos(\varphi) \vec{e}_y]$$

Ainsi le vecteur $\vec{B}(O, t)$ est un vecteur tournant dans le sens trigonométrique, avec la vitesse angulaire ω_0 . Sa norme reste constante au cours de la rotation.

$\vec{B}(O, t)$ peut être généré à partir de 2 bobines d'axes respectifs \vec{e}_z et \vec{e}_y , et alimentées par des courants sinusoïdaux déphasés de $\frac{\pi}{2}$.

12. a) À l'instant t on a :

$$\vec{m} = m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) \vec{e}_y + m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) \vec{e}_z$$

On calcule produit vectoriel avec le champ magnétique tournant dont l'expression est donnée à la question 6. et on utilise le formulaire donné en début d'énoncé pour trouver ;

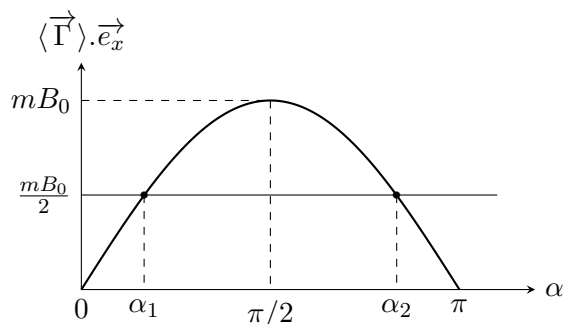
$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(t) = \frac{mB_0}{2} & \left[\cos((\omega + \omega_0)t - \alpha) + \cos\left((\omega - \omega_0)t + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right. \\ & \left. - \sin\left((\omega + \omega_0)t + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin((\omega - \omega_0)t - \alpha) \right] \vec{e}_x \end{aligned}$$

- b) Si $\omega \neq \omega_0$ les valeurs moyennes de tous les cos et sin sont nulle. La seule possibilité pour qu'elles ne soient pas nulles est $\omega = \omega_0$. Les valeurs moyennes des termes en $\cos((\omega + \omega_0)t + \dots)$ et $\sin((\omega + \omega_0)t + \dots)$ restant nulles, il ne reste alors que :

$$\omega = \omega_0 \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Gamma} \rangle = mB_0 \sin \alpha \vec{e}_x$$

- c) On veut que $\langle \vec{\Gamma} \rangle \cdot \vec{e}_x > 0$ et il s'ensuit que $\sin \alpha > 0$, ce qui impose $\alpha \in]0, \pi[$

13. a) Le schéma est donné ci-dessous :



Si on applique le théorème du moment cinétique à la boussole, sachant que $\omega = \text{Cste}$, on obtient (en désignant par J le moment d'inertie de la boussole par rapport à l'axe de rotation Ox) :

$$J \dot{\omega} = 0 = \langle \vec{\Gamma} \rangle \cdot \vec{e}_x - \frac{mB_0}{2} \quad \text{d'où} \quad \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

ce qui donne les deux solutions $\alpha_1 = \pi/6$ et $\alpha_2 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.

- b) Provisoirement on a donc $\omega < \omega_0$ puisque la boussole est ralentie, donc la boussole va "prendre du retard" par rapport au champ tournant, et α va donc légèrement augmenter.

- Si le point de fonctionnement était situé en α_1 , d'après la figure, le fait qu' α augmente va conduire à une augmentation du couple moteur Γ , de sorte que la boussole va "rattraper son retard".
- Si le point de fonctionnement était situé en α_2 , d'après la figure, le fait qu' α augmente va conduire à une diminution du couple moteur Γ , de sorte que la boussole va "prendre encore davantage de retard" et va se désynchroniser avec le champ magnétique. La boussole va rapidement s'arrêter de tourner dans ce cas.

Finalement, seul α_1 est donc une position de fonctionnement moteur stable.

Partie III – Pôles géographiques et magnétiques

14. C'est parce que le moment magnétique de la boussole s'aligne sur la composante horizontale du champ magnétique local qui est dirigé vers le nord magnétique. Cet équilibre est stable si \vec{m} est dans le même sens que \vec{B}

15. On utilise la formule donnée par l'énoncé pour obtenir :

$$\vec{M} = M_0 \vec{e}_z = M_0 \cos \theta \vec{e}_r - M_0 \sin \theta \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{R} = R_T \vec{e}_r$$

ce qui conduit à :

$$B_r = \vec{B} \cdot \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{R} \cdot \vec{e}_r)(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R_T^2 (\vec{M} \cdot \vec{e}_r)}{R_T^5} = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \frac{2 \cos \theta}{R_T^3}$$

$$B_\theta = \vec{B} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{R} \cdot \vec{e}_\theta)(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R_T^2 (\vec{M} \cdot \vec{e}_\theta)}{R_T^5} = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{R_T^3}$$

et $B_\varphi = \vec{B} \cdot \vec{e}_\varphi = 0$. On retrouve donc la formule du cours :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

16. Les lignes de champ magnétique étant dirigées du Sud vers le Nord, on a (en se souvenant de l'allure des ligne de champ d'un dipôle données dans le cours) : $M_0 < 0$. Pour s'en convaincre, on peut aussi regarder la direction et le sens de \vec{B} à l'équateur, c'est à dire pour $\theta = \pi/2$:

$$\vec{B}_E = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_\theta(\theta = \pi/2) = -\frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_z$$

Or ce champ doit être dirigé vers le nord, ce qui impose $M_0 < 0$. On en déduit que :

$$B_E = \frac{\mu_0 |M_0|}{4\pi R_T^3} \quad \text{d'où} \quad M_0 = -\frac{4\pi R_T^3 B_E}{\mu_0} \stackrel{AN}{=} -7,9 \times 10^{24} \text{ A.m}^2$$

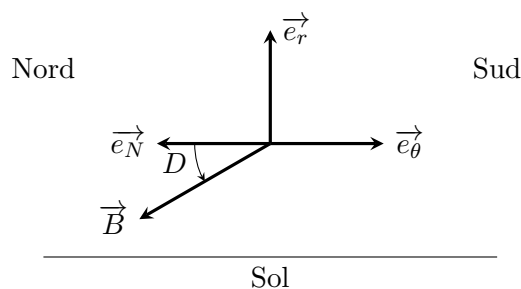
- Au pôle magnétique nord, $\theta = 0$ et :

$$|B_N| = \frac{2\mu_0 |M_0|}{4\pi R_T^3} = 2B_E = 6,0 \times 10^{-5} \text{ T}$$

- Au pôle magnétique sud, $\theta = \pi$ et l'intensité du champ magnétique est la même (en valeur absolue) :

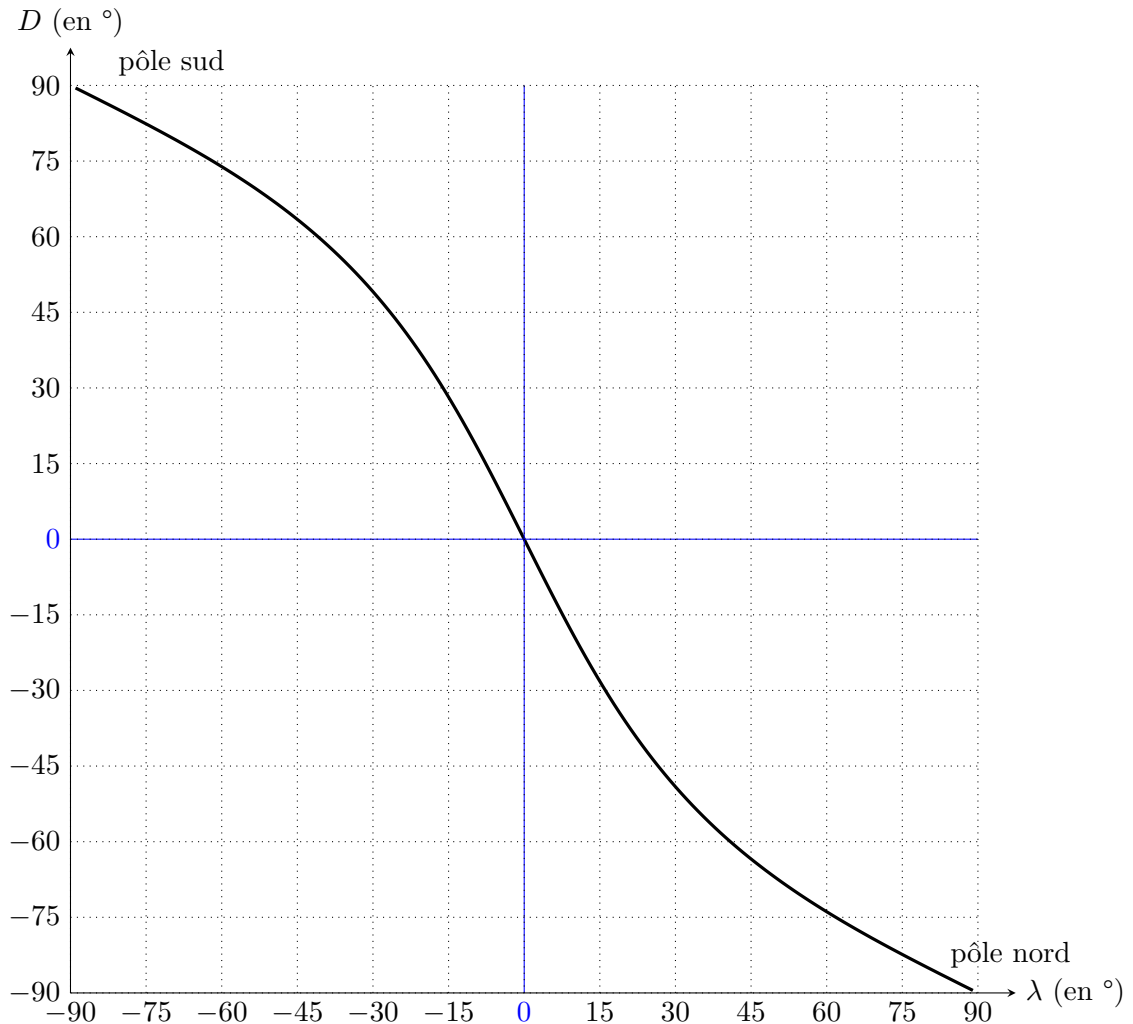
$$|B_S| = \frac{2\mu_0 |M_0|}{4\pi R_T^3} = 2B_E = 6,0 \times 10^{-5} \text{ T}$$

17. On fait un schéma pour l'hémisphère nord, localement au voisinage du sol. On a donc $\theta \in]0, \pi/2[$, donc $\cos \theta > 0$ et $\sin \theta > 0$. Cependant nous avons $M_0 < 0$, ce qui conduit au schéma ci-dessous :



On voit donc que $D < 0$ dans l'hémisphère nord. On a de plus :

$$\tan(D) = -\frac{B_r}{B_\theta} = -\frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{2 \cos(\pi/2 - \lambda)}{\sin(\pi/2 - \lambda)} = -2 \tan \lambda$$



À proximité des pôles, la composante horizontale devient très faible devant la composante verticale et la stabilité de la direction n'est plus assurée par fluctuation du champ horizontal très sensible eu égard à la faiblesse de sa valeur. Si le soleil est visible, on peut déterminer avec une boussole si on est dans l'hémisphère nord (en particulier aux latitudes grandes et moyennes : le soleil est du côté sud alors que c'est l'inverse dans l'autre hémisphère).