DM n°10
Pour le vendredi 12 janvier 2024

1 Solénoïde en régime lentement variable

Données et formulaire en coordonnées cylindriques :

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85\times 10^{-12}$ F.m^{-1}

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

On considère un éhantillon de cuivre métallique de conductivité électrique $\gamma = 6{,}0\times 10^7$ S.m^{-1} et on admettra qu'en tout point de ce conducteur, les équations de Maxwell peuvent être écrites en utilisant les constantes ε_0 et μ_0 du vide.

1) a) Montrer à partir de l'équation de conservation de la charge électrique que la densité volumique de charges en un point M quelconque mais fixé de l'échantillon vérifie une équation de la forme :

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \frac{\rho(M,t)}{\tau} = 0$$

On exprimera τ en fonction de γ et de ε_0.

b) En déduire $\rho(M,t)$ en fonction du temps. On posera $\rho_0(M) = \rho(M, t=0)$. Application numérique : calculer la constante τ. Que peut-on en déduire quant à la densité volumique de charges dans le cuivre ?

Dans toute la suite on considèrera que $\rho(M,t) = 0$ en tout point du volume du cuivre.

c) Quelle est alors la caractéristique de la densité de courant $\overrightarrow{j}(M,t)$ dans le métal ? En particulier, dans le cas où celui-ci a la forme d'un fil, que peut-on dire des intensités électriques $i_{S_1}(t)$ et $i_{S_1}(t)$ qui traversent deux sections S_1 et S_2 de ce fil ?

Cette situation sera celle de toute la suite du problème.

On considère maintenant un solénoïde d'axe Oz, de longueur $b = 50$ cm, comportant n spires par unité de longueur. Chaque spire est de forme circulaire de rayon $a = 1$ cm et elle est réalisée en cuivre. Les spires sont orientées dans le sens trigonométrique autour de l'axe Oz et parcourues par un courant dont l'intensité est donnée par :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

L'espace est rapporté à un repère $R = (Oxyz)$ où O est le point situé au milieu du solénoïde. On utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et la base locale associée $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.

2) a) Expliquer ce qu'est la zone A.R.Q.S. Donner la condition sur ω pour qu'un point M situé à l'intérieur du solénoïde soit dans la zone A.R.Q.S.. On écrira cette condition sous la forme $\omega \ll \omega_{\max}$ et on donnera l'expression de $\omega_{\max}$ ainsi que sa valeur numérique.

b) Écrire les équations de Maxwell approchées dans le cadre de ce régime, valables en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) situé à l'intérieur du solénoïde : $r < a$ et $-\frac{b}{2} < z < \frac{b}{2}$.

On rappelle que le champ magnétique créé par un solénoïde infini s'écrit :

$$\overrightarrow{B}(t) = \begin{cases} \mu_0 n\, i(t)\,\overrightarrow{e_z} & \text{dans le solénoïde} \\ \overrightarrow{0} & \text{en dehors du solénoïde} \end{cases}$$

Comme $b \gg a$, on supposera dans toute la suite que les effets de bord sont négligeables et que l'approximation du solénoïde infini *convient pour étudier notre dispositif.*

3) En utilisant les symétries du problème, montrer que le champ électrique engendré par le solénoïde en un point $M \notin Oz$ est de la forme $\overrightarrow{E} = E(r,t)\,\overrightarrow{e_\theta}$. Montrer que $\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{0}$ lorsque $M \in Oz$.

4) Déduire de l'équation de Maxwell-Faraday l'expression de $E(r,t)$:

a) à l'intérieur du solénoïde ;

b) à l'extérieur du solénoïde.

On indique qu'il n'existe aucune densité surfacique de charges dans ce problème.

5) À l'aide du théorème de Stokes écrire la forme intégrale associée à l'équation de Maxwell-Faraday. En choisissant judicieusement une courbe fermée $\mathscr{C}_F$ pour calculer la circulation de $\overrightarrow{E}$, retrouver les résultats des questions **4)** a) et **4)** b).

6) On souhaite établir un bilan énergétique pour le champ électromagnétique dans le solénoïde, c'est à dire pour $r < a$.

a) Montrer que, dans cette région de l'espace, la densité volumique d'énergie électrique u_e est négligeable devant la densité d'énergie magnétique u_m.

b) Calculer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$.

c) En déduire que l'identité locale de Poynting est bien vérifiée dans le solénoïde.

7) On se place toujours dans la région de l'espace située dans le solénoïde ($r < a$).

a) Calculer l'énergie magnétique $U_m(t)$ contenue à l'instant t dans le volume cylindrique du solénoïde, d'axe Oz, de longueur h et de rayon a.

b) Calculer le flux du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ à travers la surface fermée S_F qui délimite ce volume cylindrique.

c) Vérifier que l'identité intégrale de Poynting est bien vérifiée.

2 Émission d'un champ électromagnétique par un atome

Données :

Charge élémentaire : $e = 1{,}60\times10^{-19}$ C
Masse de l'électron : $m = 9{,}1\times10^{-31}$ kg
Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0\times10^{8}$ m.s^{-1}
Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}$ F.m^{-1}
Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H.m^{-1}

Étant donnée une application $f : t \longmapsto f(t)$ continue et $T > 0$ une durée fixée, on définit la moyenne temporelle de f sur la durée T par l'intégrale :

$$\langle f \rangle_T(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(u)\,\mathrm{d}u$$

On remarquera que cette moyenne peut dépendre de t : il s'agit en fait d'un processus de "lissage" de l'application f sur la durée T.

Enfin, on donne l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

****

On s'intéresse dans ce problème à la puissance électomagnétique émise par un atome d'hydrogène lorsque celui-ci est soumis à une perturbation qui le place hors de son état fondamental (état d'énergie minimale).

Dans le but de simplifier les calculs on adopte ici le modèle de l'atome d'hydrogène élaboré par Joseph Thomson (photo ci-contre), prix Nobel en 1906 pour avoir découvert l'électron en 1897. Il proposa en 1904 le modèle dit du "pudding électronique". Il s'agit :

- *d'une boule de centre O et de rayon a, avec $a \approx 10^{-10}$ m, uniformément chargée en volume avec une densité volumique de charge à l'intérieur de la boule notée ρ et de charge totale $+e$;*
- *d'un électron ponctuel de masse m et de charge $-e$ libre de se déplacer sans frottement à l'intérieur de cette boule.*

Dans tout le problème le référentiel d'étude $(\mathscr{R})$ sera celui de la boule de rayon a. On munira ce référentiel d'un repère d'espace $R = (Oxyz)$ où O est le centre de la boule et de sa base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ orthonormale directe.

La position d'un point M de l'espace sera parfois repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) relatives à R ou par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) associées à la base sphérique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$.

Q1 Déterminer, en tout point M intérieur à la boule, le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\,\overrightarrow{e_r}$ créé par la distribution de charge caractérisée par ρ. En donner l'expression en fonction de e, ε_0 et r.

L'électron se situe en un point M intérieur à la boule. On le repère par son vecteur position $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$.

Q2 a) Donner la force ressentie par l'électron et la mettre sous la forme $\overrightarrow{F} = -m\,\omega_0^2\,\overrightarrow{OM}$ où on explicitera l'expression de ω_0. Commenter l'expression de cette force.

b) Application numérique : évaluer l'ordre de grandeur de ω_0. Quelle est son unité ?

c) Montrer que $\overrightarrow{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_P dont on donnera l'expression en fonction de m, ω_0 et $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.

Lorsque l'atome est un élément d'un gaz placé dans une ampoule et soumis à des décharges électriques, il peut recevoir de l'énergie suite aux chocs avec d'autres atomes ou avec les parois de l'ampoule.

On considère dans ce qui suit un atome d'hydrogène ayant subi un choc à l'instant $t = 0$: l'électron initialement situé sur sa position d'équilibre en O acquière alors une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$.

Q3 Écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'électron. En déduire l'équation différentielle vectorielle vérifiée par le vecteur position $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ de l'électron. Expliciter le vecteur $\overrightarrow{r}(t)$ en fonction de t, ω_0 et $\overrightarrow{v_0}$.

Q4 Donner l'expression du vecteur moment dipolaire électrique $\overrightarrow{p}(t)$ de l'atome d'hydrogène et montrer qu'il s'écrit :

$$\overrightarrow{p}(t) = \overrightarrow{p_m}\,\sin(\omega_0 t)$$

On exprimera $\overrightarrow{p_m}$ en fonction de e et $\overrightarrow{v_0}$.

Les oscillations effectuées par l'électron sont à l'origine d'un rayonnement électromagnétique. Pour décrire l'onde émise, on introduit une longueur caractéristique $\lambda = cT_0$ où $T_0 = 2\pi/\omega_0$ est la période d'oscillation.

En un point $M(r, \theta, \varphi)$ de la zone de rayonnement, le champ électromagnétique créé a pour expression :

$$\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi c}\,\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t^2}(t - r/c) \wedge \frac{\overrightarrow{e_r}}{r} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{E}(M,t) = c\overrightarrow{B}(M,t) \wedge \overrightarrow{e_r}$$

où c est la célérité de la lumière dans le vide.

Q5 Dans toute cette question on suppose que $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_z}$.

a) Rappeler la définition de la zone de rayonnement. On fera intervenir une hiérarchie entre trois distances caractéristiques et on donnera la signification physique des inégalités écrites.

b) Déterminer les expressions de $\overrightarrow{B}(M,t)$ et de $\overrightarrow{E}(M,t)$ sur la base sphérique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$

c) En déduire l'expression de la puissance rayonnée $\mathscr{P}_{\text{ray}}(r,t)$ à travers la sphère de centre O et de rayon r, puis sa moyenne $\langle \mathscr{P}_{\text{ray}} \rangle_{T_0}$ sur la durée T_0. Commenter le résultat obtenu.

d) Montrer que $\langle \mathscr{P}_{\text{ray}} \rangle_{T_0} = K\,\mathscr{E}_m$ où $\mathscr{E}_m$ est l'énergie mécanique de l'atome et K une constante que l'on exprimera en fonction de μ_0, c, e, ω_0 et m.

La puissance électromagnétique rayonnée par l'atome est prélevée sur son énergie mécanique. Celle-ci ne peut donc que décroître au cours du temps. Afin de modéliser cette décroissance on revient provisoirement à une direction quelconque d'oscillation du moment dipolaire électrique $\overrightarrow{p}(t)$ et on introduit un facteur de décroissance exponentielle avec un temps caractéristique τ :

$$\overrightarrow{p}(t) = \overrightarrow{p_0}\,e^{-t/2\tau}\,\sin(\omega_0 t), \quad t \geqslant 0$$

où $\overrightarrow{p_0}$ est un vecteur constant.

Dans toute la suite on supposera que $\tau\omega_0 \gg 1$ (hypothèse H)

Q6 a) Quelle est la signification physique de l'hypothèse (H) ?

b) Déterminer les vecteurs position $\overrightarrow{OM}(t)$, vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ et accélération $\overrightarrow{a}(t)$ de l'électron. Simplifier les expressions obtenues compte-tenu de (H).

c) En déduire que l'énergie mécanique de l'atome vérifie :

$$\mathscr{E}_m(t) = \mathscr{E}_m(0)\, e^{-t/\tau}$$

Exprimer $\mathscr{E}_m(0)$ en fonction de e, m, ω_0 et $p_0 = \|\overrightarrow{p_0}\|$.

On cherche à modéliser la décroissance de l'énergie mécanique au moyen d'une force non conservative fictive $\overrightarrow{f_a}(t)$ qui agit sur l'électron et qui vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t} = \langle \overrightarrow{f_a}.\overrightarrow{v} \rangle_{T_0}(t)$$

*Dans la question **Q7** suivante on suppose pour simplifier que le mouvement de l'électron se fait uniquement le long de l'axe Oz : on a donc $\overrightarrow{v}(t) = v(t)\,\overrightarrow{e_z}$. On cherche alors $\overrightarrow{f_a}(t)$ sous la forme :*

$$\overrightarrow{f_a}(t) = F_0\, e^{-t/2\tau}\, \cos(\omega_0 t)\, \overrightarrow{e_z}$$

Q7 a) Déterminer F_0 en utilisant la question **Q6**. On remarquera que le facteur exponentiel varie très lentement à l'échelle d'une période T_0 est qu'on peut donc le considérer comme constant dans l'intégrale donnant la valeur moyenne.

b) Montrer que $\overrightarrow{f_a}$ peut alors s'écrire sous la forme $\overrightarrow{f_a} = -\dfrac{m}{\tau}\,\overrightarrow{v}$.

*Dans toute la suite du problème on supposera que l'électron est soumis, en plus des autres forces, à la force non conservative $\overrightarrow{f_a}$ dont l'expression est donnée à la question **Q7** b), avec l'hypothèse $\tau\omega_0 \gg 1$.*

Une autre façon d'exciter l'atome est de le placer dans un champ électrique à oscillations sinusoïdales que l'on supposera uniforme pour simplifier et qui s'écrit :

$$\overrightarrow{E}(t) = E_m\, \cos(\omega t)\, \overrightarrow{e_z}$$

Certaines valeurs de la pulsation ω, appelée pulsation excitatrice, *peuvent provoquer une résonance des oscillations de l'électron que nous allons étudier dans les questions suivantes.*

Q8 En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'électron montrer que le vecteur moment dipolaire électrique $\overrightarrow{p}(t)$ de l'atome vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,\overrightarrow{p} = \frac{e^2E_m}{m}\,\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$$

Q9 On s'intéresse à la solution forcée que l'on cherche sous la forme :

$$\overrightarrow{p}(t) = \mathrm{Re}\left[\underline{p}_m\, e^{i\omega t}\right]\,\overrightarrow{e_z}$$

où $\underline{p}_m$ est un nombre complexe (amplitude complexe) dont on cherche l'expression.

Déterminer $\underline{p}_m$ en fonction de ω, ω_0, τ et de e^2E_m/m. En déduire $\overrightarrow{p}(t)$ en l'exprimant comme une combinaison linéaire de $\cos(\omega t)$ et de $\sin(\omega t)$.

On admet que la puissance électromagnétique rayonnée à travers la sphère de centre O et de rayon r située dans la zone de rayonnement est donnée par l'expression :

$$\mathscr{P}_{\mathrm{ray}}(r,t) = \frac{\mu_0}{6\pi c}\left\|\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t^2}(t - r/c)\right\|^2$$

Q10 a) Déterminer $\mathscr{P}_{\mathrm{ray}}(r,t)$ et en déduire sa moyenne $\langle\mathscr{P}_{\mathrm{ray}}\rangle_T$ sur une durée $T = 2\pi/\omega$.

b) On introduit la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ et on note $\mathscr{P}_0$ la valeur de $\langle\mathscr{P}_{\mathrm{ray}}\rangle_T$ lorsque $\omega = \omega_0$. Expliciter $\langle\mathscr{P}_{\mathrm{ray}}\rangle_T$ en fonction de $\mathscr{P}_0$, x et du produit $\tau\omega_0$.

c) Comment s'exprime la puissance moyenne $\langle\mathscr{P}_{\mathrm{ray}}\rangle_T$ lorsque $\omega \ll \omega_0$? Lorsque $\omega \gg \omega_0$? Que vaut-elle pour $\omega = 0$ et pour $\omega \longrightarrow +\infty$?

d) La figure 1 représente $\langle\mathscr{P}_{\mathrm{ray}}\rangle_T$ en fonction de la pulsation réduite x. On observe un pic de résonance au voisinage de $\omega = \omega_0$. Dans le cas où $\omega_0\tau \gg 1$ on peut montrer qu'au voisinage de ω_0, $\langle\mathscr{P}_{\mathrm{ray}}\rangle_T$ peut s'écrire de façon approchée :

$$\langle\mathscr{P}_{\mathrm{ray}}\rangle_T = \frac{\mathscr{P}_0}{1 + (\tau\omega_0)^2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2}$$

En déduire la pulsation de résonance ω_r, la largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ (appelée bande passante) et le facteur de qualité Q défini par $Q = \dfrac{\omega_r}{\Delta\omega}$. On donnera les expressions approchées de $\Delta\omega$ et Q à l'ordre le plus bas non nul en $1/(\tau\omega_0)$.

Application numérique : $\tau = 10^{-9}$ s et $\omega_0 = 1{,}6{\times}10^{16}$ rad.s^{-1}. Calculer $\Delta\omega$ et Q. Conclure.

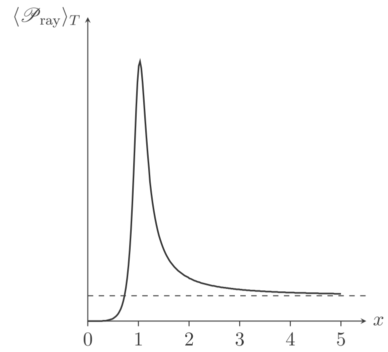

FIGURE 1 – Représentation de la puissance moyenne rayonnée en fonction de la pulsation réduite.

Q11 On cherche à tracer la courbe de la fonction $\omega \longmapsto \frac{1}{1+(\tau\omega_0)^2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}-1\right)^2}$ définie en Q10, au voisinage de la résonance, de telle sorte qu'on puisse visualiser la largeur à mi-hauteur. On écrit en Python le programme suivant :

```python
import matplotlib.pyplot as plt

n = 10000
omega_0 = 1.6e16
tau = 1e-9
m = 1e9
a,b = omega_0 - m,omega_0 + m
X = [ a + (b-a)*k/(n-1) for k in range(n) ]
Y = [ 1/(1+(omega_0**2)*(tau**2)*(omega_0**2/x**2-1)**2) for x in X ]

plt.plot(X,Y)
plt.xlim(a,b)
plt.ylim(-1,2)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("Pray")
plt.show()
```

a) Que représente la variable nommée `n` ?

b) Sur quelle plage de valeurs de ω la fonction g est-elle tracée si on utilise ce programme ?

c) Peut-on visualiser la bande passante (telle que calculée à la Q10 d) ?

d) Que contient la variable nommée `X` ?

Q12 On cherche également à déterminer les pulsations de coupure ω_1 et ω_2. On les définit comme les deux seules valeurs qui annulent une fonction supposée continue h. On écrit en Python le programme suivant :

```python
def dicho(f,a,b,epsilon) :
  if f(a)*f(b)>0 :
    return None
  u,v = a,b
  while abs(v-u) > epsilon :
    w = (u + v)/2
    if f(u)*f(w) <= 0 :
      v = w
    else :
       u = w
  return (u + v)/2

omega_0 = 1.6e16
tau = 1e-9

def h(x):
  val = 1/( 1+(tau**2)*(omega_0**2)*(omega_0**2/x**2-1)**2 )
  return val-1/2

m = 1e9
min = dicho(h,omega_0-m,omega_0,10)
max = dicho(h,omega_0,omega_0+m,10)
```

a) Donner l'expression de la fonction $h(\omega)$.

b) Quel est le rôle des deux lignes du programme écrites ci-dessous ?

```python
if f(a)*f(b) > 0 :
  return None
```

c) L'exécution de ce programme conduit aux valeurs suivantes :

min = 15 999 999 500 000 028
max = 16 000 000 500 000 020

Avec quelle précision cet algorithme dichotomique fournit-il ces résultats ?

d) Calculer la bande passante $\Delta\omega$ avec ces résultats. En déduire le facteur de qualité Q.