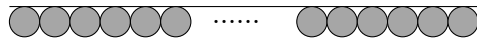
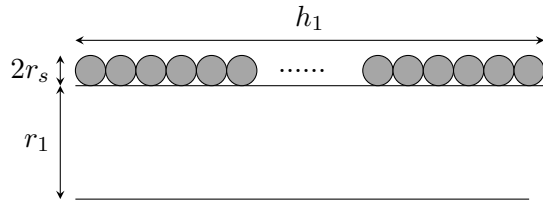


Corrigé du DM n°11

I.A. Résistance des deux bobines**Bobine primaire :**

On l'assimile à un empilement de spires circulaires jointives sur une longueur h_1 . On suppose que le fil de cuivre a une section de diamètre $2r_s$, ce qui fait que la circonférence du cercle passant au milieu de la section d'une spire est $2\pi(r_1 + r_s)$.

Le nombre de spires est $h_1/(2r_s)$.



La longueur total de l'enroulement primaire est donc :

$$\ell_1 = 2\pi(r_1 + r_s) \times \frac{h_1}{2r_s} = \pi h_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_s}\right)$$

La section du fil est πr_s^2 . Comme on connaît la résistance de l'enroulement primaire, on en déduit l'équation :

$$R_1 = \frac{1}{\gamma_{\text{Cu}}} \frac{h_1}{r_s^2} \left(1 + \frac{r_1}{r_s}\right) \approx \frac{1}{\gamma_{\text{Cu}}} \frac{h_1 r_1}{r_s^3}$$

si on suppose que $r_1 \gg r_s$. Il vient :

$$d_s = 2r_s = 2 \left(\frac{h_1 r_1}{\gamma_{\text{Cu}} R_1} \right)^{1/3} \stackrel{\text{A.N.}}{\approx} 1,1 \text{ mm}$$

Ce résultat numérique justifie l'approximation $r_1 \gg r_s$ qui a été faite. On obtient ensuite :

$$\ell_1 = \pi h_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_s}\right) \stackrel{\text{A.N.}}{\approx} 36 \text{ m}$$

ce qui représente une longueur assez importante.

Bobine secondaire

Pour faire le calcul de ℓ_2 et de d'_s (diamètre de la section du fil de l'enroulement secondaire), on va supposer que le fil occupe tout le volume de longueur h_2 et compris entre les rayons r_1 et r_2 : on néglige donc les interstices entre les fils ce qui peut être justifié par le fait que le fil de cet enroulement est très fin (cf. énoncé).

En utilisant le schéma donné page 8 de l'énoncé, on mesure avec un règle les rapports ci-dessous :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{11,2}{14,9} \quad \text{d'où} \quad h_2 = 33,1 \text{ cm}$$

et

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{4,5}{1,8} \quad \text{donc} \quad r_2 = 67,5 \text{ mm}$$

Le volume occupé par le fil de l'enroulement secondaire se calcule de deux façons :

$$V = \pi(r_2^2 - r_1^2) h_2 = \pi r_s'^2 \times \ell_2$$

où r'_s est le rayon de la section du fil. En utilisant la résistance de l'enroulement secondaire, on obtient alors l'équation :

$$R_2 = \frac{1}{\gamma_{\text{Cu}}} \frac{\ell_2}{\pi r_s'^2} = \frac{1}{\gamma_{\text{Cu}}} \frac{\ell_2^2}{\pi(r_2^2 - r_1^2) h_2}$$

donc :

$$\ell_2 = \sqrt{\gamma_{\text{Cu}} R_2 \pi (r_2^2 - r_1^2) h_2} \stackrel{\text{A.N.}}{\approx} 48 \text{ km}$$

et

$$d'_s = 2r'_s = 2 \sqrt{\frac{(r_2^2 - r_1^2) h_2}{\ell_2}} \stackrel{\text{A.N.}}{=} 0,3 \text{ mm}$$

Ces valeurs numériques sont extraordinaires ; fabriquer un enroulement de 48 km de fil avec un diamètre aussi petit est une prouesse technologique pour cette époque (1850).

I.B – Détermination des grandeurs inductives de l'association de Ruhmkorff

Expérience 1

La bobine secondaire étant en circuit ouvert on a $i_2 = 0$. L'équation vérifiée par le courant traversant la première bobine est alors :

$$e_g = L_1 \frac{di_1}{dt} + (R_1 + R_0 + R_g) i_1$$

Le graphe de la Figure A indique la tension u aux bornes de R_0 après que e_g ait basculé de sa valeur "haute" à 0. Durant cette phase u vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + \frac{R_1 + R_0 + R_g}{L_1} u = 0$$

qui a pour solution :

$$u(t) = u(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L_1}{R_1 + R_0 + R_g}$$

Une détermination de τ avec la méthode de la tangente est trop imprécise ici et il vaut mieux en passer par le fait que $u(\tau) = u(0)/e = 0,37 u(0)$. Une lecture graphique indique que $\tau = 39 \mu\text{s}$. On en déduit que :

$$L_1 = (R_1 + R_0 + R_g) \tau = 5,9 \text{ mH}$$

ce qui est un bon ordre de grandeur de ce qu'on rencontre en TP.

Expérience 2

Cette fois c'est la bobine primaire qui est en circuit ouvert : $i_1 = 0$. La bobine secondaire est traversée par un courant sinusoïdal de pulsation ω . Dans le domaine complexe nous pouvons écrire :

$$\underline{i}_2(t) = \underline{I}_{m2} e^{j\omega t} ; \quad \underline{u}_a(t) = R_a \underline{i}_2(t) \quad \text{et} \quad \underline{u}_2(t) = (R_2 + jL_2\omega) \underline{i}_2(t)$$

On a donc :

$$\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_a} = \frac{R_2 + jL_2\omega}{R_a} \quad \text{donc} \quad G = \frac{U_{m2}}{U_{ma}} = \frac{\sqrt{R_2^2 + L_2^2\omega^2}}{R_a}$$

et

$$\varphi_2 - \varphi_a = \arg\left(\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_a}\right) = \arctan\left(\frac{L_2\omega}{R_2}\right)$$

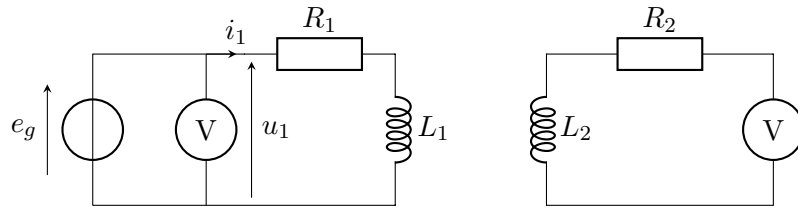
On en déduit que u_2 est en avance de phase sur u_a , ce qui permet d'identifier les deux courbes. On lit :

- $U_{m2} = 4,875 \text{ V}$ et $U_{ma} = 1,875 \text{ V}$ d'où $G = 2,6$
- Décalage temporel : $\tau = 9,2 \text{ ms}$ d'où $\varphi_2 - \varphi_a = 2\pi f\tau$ La lecture de la période temporelle donne $T = 48,8 \text{ ms}$ et donc $f = 20,5 \text{ Hz}$

On peut utiliser une des deux méthodes puisqu'on connaît R_2 et $\omega = 2\pi f \approx 129 \text{ rad.s}^{-1}$. Par exemple :

- $L_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{G^2 R_a^2 - R_2^2} \approx 1,87 \times 10^2 \text{ H}$
- ou bien : $L_2 = \frac{R_2}{\omega} \tan(\varphi_2 - \varphi_a) = 1,86 \times 10^2 \text{ H}$

Les deux valeurs sont donc extrêmement proches. Ces valeurs d'inductance sont énormes !

Expérience 3 :

Le voltmètre dans le secondaire impose $i_2 = 0$. Les équations reliant les tensions et les intensités données par l'énoncé sont donc :

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 \quad \text{et} \quad u_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

d'où, dans le domaine complexe :

$$\underline{u}_1(t) = (R_1 + jL_1\omega) \underline{i}_1(t) \quad \text{et} \quad \underline{u}_2(t) = jM\omega \underline{i}_1(t)$$

On a donc :

$$\frac{\underline{u}_2(t)}{\underline{u}_1(t)} = \frac{jM\omega}{R_1 + jL_1\omega}$$

On reconnaît une structure de filtre passe-haut du second ordre. Les valeurs efficaces des tensions étant $U_{\text{eff}} = U_m/\sqrt{2}$ il vient :

$$\frac{U_{2,\text{eff}}}{U_{1,\text{eff}}} = \frac{M\omega}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2\omega^2}}$$

L'asymptote haute-fréquence $\omega \rightarrow +\infty$ est M/L_1 , donc en diagramme logarithmique on a : $G_{\text{dB}} = 20 \log(M/L_1) = 42,4 \text{ dB}$, ce qui entraîne :

$$M = L_1 \times 10^{G_{\text{dB}}/20} = 780 \text{ mH}$$

I.C – Tension induite lors de la coupure de courant

I.C.1) En l'absence d'étincelle $i_2 = 0$ et les équations s'écrivent :

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 \quad \text{et} \quad u_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

I.C.2) On a pour $t > 0$:

$$e_0 = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 \quad \text{donc} \quad \frac{di_1}{dt} + \frac{R_1}{L_1} i_1 = \frac{e_0}{L_1}$$

La constante de temps τ de ce circuit vaut $\tau = L_1/R_1$ et la solution vérifiant la condition initial $i_1(0^+) = 0$ (continuité du courant dans une bobine) est :

$$i_1(t) = \frac{e_0}{R_1} (1 - e^{-t/\tau})$$

I.C.3) Il vient :

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} = \frac{M}{L_1} e_0 e^{-t/\tau}$$

I.C.4) La tension u_2 est maximale lorsque $t = 0^+$ et :

$$u_{2,\text{max}} = \frac{M}{L_1} e_0 = 13,2 \text{ kV}$$

ce qui est très important ! Ce dispositif est donc tout à fait adapté pour créer la tension nécessaire à déclencher l'étincelle.

I.C.5) On ne va pas tenir compte de l'étincelle : l'intensité $i_1(t)$ est donc donnée par :

$$i_1(t) = \frac{e_0}{R_1} (1 - e^{-t/\tau})$$

avec $e_0/R_1 = 81,3 \text{ A}$ ce qui est une intensité trop importante. Si on ne veut pas griller les fils du primaire, il faut maintenir

l'intensité en dessous de 10 A (et même 5A serait mieux). Il faut donc que :

$$1 - e^{-t/\tau} < 0,12 \iff e^{t/\tau} < 0,14$$

d'où

$$t < \frac{L_1}{R_1} \times \ln(1,14) = 6,3 \times 10^{-4} \text{ s}$$

ce qui est vraiment très court !

II.A – Effet d'avalanche ...

II.A.1) Entre deux chocs, un électron donné est soumis au principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \quad \text{d'où} \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 - \frac{e}{m} \vec{E} (t - t_c)$$

où \vec{v}_0 est la vitesse initial de l'électron juste après le choc supposé se produire à l'instant $t = t_c$. La vitesse maximale sera acquise juste avant le choc suivant qui se passera à l'instant t'_c tel que :

$$\vec{v}_{\max} = \vec{v}(t'_c) = \vec{v}_0 - \frac{e}{m} \vec{E} (t'_c - t_c)$$

En faisant la moyenne arithmétique sur un grand nombre d'élections (moyenne statistique), on obtient une vitesse maximale moyenne donnée par :

$$\langle \vec{v}_{\max} \rangle = \langle \vec{v}_0 \rangle - \frac{e}{m} \vec{E} \langle t'_c - t_c \rangle$$

Or $\langle \vec{v}_0 \rangle = \vec{0}$ puisque les vitesses après chaque choc sont distribuées de façon aléatoires et $\langle t'_c - t_c \rangle = \tau_c$ durée moyenne entre deux chocs. On a donc :

$$\langle \vec{v}_{\max} \rangle = -\frac{e}{m} \vec{E} \tau_c$$

En assimilant l'énergie cinétique maximale moyenne à :

$$E_{c,max} = \frac{1}{2} m \langle \vec{v}_{\max} \rangle^2 = \frac{e^2 \|\vec{E}\|^2 \tau_c^2}{2m}$$

Si cette énergie cinétique est supérieure à l'énergie d'ionisation W_{oxy} , un nouvel électron est arraché : c'est l'effet d'avalanche. On se place à la limite (égalité) ce qui a lieu lorsque $E = E_d$ (champ disruptif) :

$$\frac{e^2 E_d^2 \tau_c^2}{2m} = W_{\text{oxy}} \implies E_d = \frac{\sqrt{2m W_{\text{oxy}}}}{e \tau_c} = 1,2 \times 10^7 \text{ V.m}^{-1}$$

ce qui est 3 - 4 fois la valeur donnée par l'énoncé.

II.A.2) On intègre une seconde fois (le champ électrique valant E_d) :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(t_c) + \vec{v}_0 (t - t_c) - \frac{e}{2m} \vec{E}_d (t - t_c)^2$$

d'où en prenant cette équation au temps t'_c et en posant $M_c = M(t_c)$ (position de l'électron au moment du choc), on obtient :

$$\overrightarrow{M_c M}(t'_c) = \vec{v}_0 (t'_c - t_c) - \frac{e}{2m} \vec{E}_d (t'_c - t_c)^2$$

On en prend la valeur moyenne (moyenne arithmétique sur un grand nombre d'électrons) et, en supposant que $\langle \vec{v}_0 (t'_c - t_c) \rangle = \vec{0}$ et que $\langle (t'_c - t_c)^2 \rangle = \tau_c^2$, on obtient :

$$\langle \overrightarrow{M_c M}(t'_c) \rangle = -\frac{e}{2m} \vec{E}_d \tau_c^2$$

et donc, le libre parcours moyen est :

$$\ell = \left\| \langle \overrightarrow{M_c M}(t'_c) \rangle \right\| = \frac{e E_d \tau_c^2}{2m} = 3 \times 10^{-7} \text{ m} = 0,3 \mu\text{m}$$

Or E varie sur une échelle de l'ordre de 0,1 mm donc on peut considérer que \vec{E} est uniforme à cette échelle du libre parcours moyen.

II.B – Estimation de la tension inter électrodes ...

II.B.1) La distribution de charges est invariante par toute rotation d'axe Oz : les coordonnées cylindriques de \vec{E} ne dépendent donc pas de l'angle θ .

Plaçons-nous dans le plan Oxy :

- Ce plan est un plan de symétrie des charges donc de \vec{E} . Il s'ensuit que $E_y = 0$.

- Le plan Oyz étant un plan de symétrie des charges, on a :

$$\vec{E}(-x, z) = \text{sym}_{Oyz} \vec{E}(x, z) = -E_x(x, z) \vec{e}_x + E_z(x, z) \vec{e}_z$$

et donc :

$$\boxed{E_x(-x, z) = -E_x(x, z) \quad \text{et} \quad E_z(-x, z) = E_z(x, z)}$$

- Le plan Oxy étant un plan d'antisymétrie des charges, on a :

$$\vec{E}(x, -z) = -\text{sym}_{Oxy} \vec{E}(x, z) = -E_x(x, z) \vec{e}_x + E_z(x, z) \vec{e}_z$$

et donc :

$$\boxed{E_x(x, -z) = E_x(x, z) \quad \text{et} \quad E_z(x, -z) = -E_z(x, z)}$$

II.B.2) Les lignes de champ électrique sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles. De plus \vec{E} est dirigé vers les potentiels décroissants mais aussi des charges positives vers les charges négatives. L'électrode inférieure porte donc une charge + et l'électrode supérieure une charge -.

II.B.3) La tension est $U = 2 \text{ V}$ et $q = CU$ d'où :

$$\boxed{C = \frac{q}{U} = 3,1 \times 10^{-13} \text{ F}}$$

II.B.4) C'est sur l'axe Oz que le champ électrique est plus intense car les équipotentielles y sont plus resserrées : l'éclair va donc passer par l'axe Oz .

Or si $M \in Oz$, $\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$ car Oxz et Oyz sont deux plans de symétrie des charges contenant M . De plus :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dz} \vec{e}_z$$

La figure E indique que la pente de $V(z)$ est plus petite au voisinage de O . En ce point on y mesure :

$$|E(O)| = \frac{\Delta V}{\Delta z} = \frac{0,5}{10^{-3}} = 5 \times 10^2 \text{ V.m}^{-1}$$

Or il faut au minimum $E(O) = E_d = 3,6 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$, c'est à dire 7200 fois plus élevé. Il faut donc appliquer une différence de potentiel de 14,4 kV au lieu de 2 V.

II.B.5) On assimile l'énergie à celle du condensateur :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} CU^2 = 3,2 \times 10^{-5} \text{ J}}$$

Cette énergie est dissipée sous forme d'énergie cinétique communiquée aux électrons, sous forme de chaleur et d'énergie lumineuse (et sonore on entend l'étincelle).

II.B.6) On cherche sur la figure F r_0 tel que $E(z=0)$ soit multiplié par 0,9 et on trouve $r_0 = 0,45 \text{ mm}$. La zone parcourue a donc un diamètre de 0,90 mm.