Correction du TD Équations de Maxwell

4 Boule radioactive *

1. a) Les positrons situés à l'instant t sur la sphère de rayon r on été émis à l'instant $t-(r-R)/v$. Ceux situés à ce même instant t sur la sphère de rayon $r+\mathrm{d}r$ on été émis à l'instant $t-(r+\mathrm{d}r-R)/v$.

   On en déduit que les électrons situés à l'instant t dans la coquille ont été émis entre les instants $t-(r-R)/v$ et $t-(r+\mathrm{d}r-R)/v$, c'est à dire durant un intervalle de temps :

$$t-\frac{r-R}{v}-\left(t-\frac{r+\mathrm{d}r-R}{v}\right)=\frac{\mathrm{d}r}{v}$$

   Il y en a en tout $n\,\mathrm{d}r/v$, chacun portant une charge $+e$. La charge éléctrique totale dans la coquille de volume $4\pi\,r^2\,\mathrm{d}r$ est donc :

$$\delta Q_{\text{coquille}}=\frac{en\,\mathrm{d}r}{v}\quad\text{d'où}\quad\rho(r,t)=\frac{\delta Q_{\text{coquille}}}{4\pi\,r^2\,\mathrm{d}r}$$

   c'est à dire :

$$\boxed{\rho(r,t)=\frac{en}{4\pi\,v\,r^2}}$$

   Ceci n'est vrai que si $r<R+vt$. Dans le cas où $r>R+vt$, aucun positrons n'a eu le temps d'arriver à cette distance à l'instant t et donc $\boxed{\rho(r,t)=0}$.

   b) On a :

$$\boxed{\overrightarrow{j}(r,t)=\rho(r,t)\,\overrightarrow{v}=\frac{en}{4\pi\,r^2}\,\overrightarrow{u_r}\quad\text{si}\quad r<R+vt}$$

   et

$$\boxed{\overrightarrow{j}(r,t)=\overrightarrow{0}\quad\text{si}\quad r>R+vt}$$

2. On utilise les coordonnées sphériques. Le plan $(M,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\varphi})$ est un plan de symétrie des charges et des courants, donc un plan d'antisymétrie de $\overrightarrow{B}$ contenant M. On en déduit que $\overrightarrow{B}(M,t)//\overrightarrow{u_\theta}$.

   De même, le plan $(M,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ est un plan de symétrie des charges et des courants, donc un plan d'antisymétrie de $\overrightarrow{B}$ contenant M. On en déduit que $\overrightarrow{B}(M,t)//\overrightarrow{u_\varphi}$.

   Or ces deux propriétés ne peuvent être réalisées en même temps que si $\boxed{\overrightarrow{B}(M,t)=\overrightarrow{0}}$. **Le champ magnétique est donc nul**.

   En ce qui concerne le champ électrique, un même étude des symétries montre que $\overrightarrow{E}(M,t)=E(r,\theta,\varphi,t)\,\overrightarrow{u_r}$. Il y a de plus invariance de la distributions de charges et de courants par toute rotation dont l'axe passe par O. On en déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M,t)=E(r,t)\,\overrightarrow{u_r}}$$

   On utilise ensuite l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div}\overrightarrow{E}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2E(r,t)\right)=\frac{\rho(r,t)}{\varepsilon_0}=\frac{en}{4\pi\varepsilon_0\,v\,r^2}\quad\text{si}\quad r<R+vt$$

   et

$$\operatorname{div}\overrightarrow{E}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2E(r,t)\right)=0\quad\text{si}\quad r>R+vt$$

   On intègre par étape, en remarquant que les constantes d'intégration sont en fait des fonctions du temps t uniquement.

   - Si $r<R+vt$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2E(r,t)\right)=\frac{en}{4\pi\varepsilon_0\,v}\quad\text{d'où}\quad r^2E(r,t)=\frac{en\,r}{4\pi\varepsilon_0\,v}+C_1(t)$$

     et donc :

$$E(r,t)=\frac{en}{4\pi\varepsilon_0\,v\,r}+\frac{C_1(t)}{r^2}$$

- Si $r > R + vt$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E(r,t)\right) = 0 \quad \text{d'où} \quad r^2 E(r,t) = C_2(t)$$

c'est à dire :

$$E(r,t) = \frac{C_2(t)}{r^2}$$

Il faut maintenant déterminer les fonctions $C_1(t)$ et $C_2(t)$. Il faut d'abord remarquer que la boule de rayon R se charge négativement (conservation de la charge), avec une charge totale exactement opposée à la charge positive émise à l'instant t. La charge globale {sphère + positrons} reste nulle.

Pour $r > R + vt$, on applique le théorème de Gauss, en choisissant une sphère de rayon r :

$$\oiint_{S_G} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = 4\pi\, C_2(t) = 0 \quad \text{car} \quad Q_{\text{int}}(t) = 0$$

On en déduit que :

$$\boxed{E(r,t) = 0 \quad \text{si} \quad r > R + vt}$$

On utilise ensuite la continuité de $\overrightarrow{E}$ en $r = R + vt$:

$$\frac{en}{4\pi\varepsilon_0\, v\,(R+vt)} + \frac{C_1(t)}{(R+vt)^2} = 0$$

et donc :

$$C_1(t) = -\,\frac{en\,(R+vt)}{4\pi\varepsilon_0\, v}$$

soit :

$$\boxed{E(r,t) = \frac{en}{4\pi\varepsilon_0\, v}\left(\frac{1}{r} - \frac{R+vt}{r^2}\right) \quad \text{si} \quad r < R + vt}$$

3. Par conservation de la charge électrique :

$$\boxed{Q(t) = -\,en\,t}$$

On peut retrouver ce résultat en appliquant le théorème de Gauss pour une sphère de rayon r telle que $R < r < R + vt$ puis en faisant tendre r vers R (par valeurs supérieures).

$$\begin{aligned}\oiint_{S_G} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} &= \frac{en}{4\pi\varepsilon_0\, v}\left(\frac{1}{r} - \frac{R+vt}{r^2}\right) \times 4\pi r^2 \\ &= \frac{en}{\varepsilon_0\, v}\,(r - R - vt)\end{aligned}$$

Si $r \longrightarrow R$ alors :

$$\oiint_{S_G} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} \longrightarrow -\,\frac{en\,t}{\varepsilon_0} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$$

et donc :

$$\boxed{Q(t) = -\,en\,t}$$

On retrouve bien le même résultat.