4 Boule radioactive *

L'expression de la divergence en coordonnées sphériques d'un champ vectoriel de la forme $\vec{a} = a(r,t)\,\overrightarrow{e_r}$ sera prise dans le formulaire ou au début de l'exercice 1.

Une boule de matière radioactive, de centre O et de rayon R, est électriquement neutre à l'instant $t = 0$. À partir de cet instant initial, elle émet depuis sa surface n positons β^+ par unité de temps, chaque positon ayant une charge élémentaire e. On suppose que l'émission est isotrope, les charges émises ayant une même vitesse radiale $\vec{v} = v\,\vec{u}_r$ de norme v constante.

1) a) *En étudiant la charge électrique contenue à l'instant $t > 0$ dans une coquille sphérique limitée par les rayons r et $r + \mathrm{d}r$, déterminer la densité volumique de charges $\rho(r,t)$ en tout point de l'espace situé à une distance $r > R$ du centre de la boule radioactive. Que se passe-t-il si $r > R + vt$?*

Les positons qui atteignent la sphère de rayon r à l'instant t ont été émis à l'instant $t_1 = t - \frac{r-R}{v}$ et ceux qui atteignent la sphère de rayon $r + \mathrm{d}r$ au même instant t ont été émis à l'instant $t_2 = t - \frac{r+\mathrm{d}r-R}{v}$.

De ce fait, les positons contenus dans la coquille sphérique ont été émis entre t_2 et t_1, c'est à dire pendant une durée $t_1 - t_2 = \frac{\mathrm{d}r}{v}$ et il y en a donc :

$$\delta N = n\frac{\mathrm{d}r}{v}$$

ce qui correspond à la charge électrique $\delta Q = e\delta N$ contenue dans le volume $4\pi r^2\,\mathrm{d}r$. On a donc :

$$\rho(r,t) = \frac{e\delta N}{4\pi r^2\,\mathrm{d}r} = \frac{n\,e}{4\pi v\,r^2}$$

Cependant, ceci n'est vrai que si les positon ont eu le temps d'atteindre la sphère de rayon r depuis leur début d'émission à l'instant $t = 0$: il faut donc que $r < R + vt$. On a donc plus précisément :

$$\boxed{\rho(r,t) = \begin{cases} \dfrac{n\,e}{4\pi v\,r^2} & \text{si} \quad r < R + vt \\ 0 & \text{si} \quad r > R + vt \end{cases}}$$

b) *Expliciter de même le vecteur densité de courant $\vec{j}$ en tout point situé à une distance $r > R$.*

Les positons situés dans un élément de volume $\mathrm{d}\tau_M$ localisé en un point M situé à la distance $R < r < R + vt$ de O ont quasiment tous la même vitesse $\vec{v} = v\,\vec{u_r}$ qui coïncide alors avec la vitesse de dérive. Le vecteur densité de courant est alors :

$$\vec{j} = \rho(r,t)\,v\,\overrightarrow{u_r} = \frac{n\,e}{4\pi\,r^2}\,\overrightarrow{u_r}$$

Au-delà de $r = R + vt$, il n'y a pas de charges puisque les positons n'on pas encore eu le temps d'atteindre cette position à l'instant t. On a donc :

$$\boxed{\vec{j}(M,t) = \begin{cases} \dfrac{n\,e}{4\pi\,r^2}\,\overrightarrow{u_r} & \text{si} \quad r < R + vt \\ \vec{0} & \text{si} \quad r > R + vt \end{cases}}$$

2) *Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ en tout point M tel que $r = OM > R$. Que peut-on dire du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$?*

Résolvons l'équation de Maxwell-Gauss, en commençant par étudier les symétries et invariances.

- Les plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\varphi})$ sont des plans de symétries des charges et des courants contenant M, donc des plans de symétrie de $\overrightarrow{E}$. Il en résulte que :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E(r,\theta,\varphi,t)\,\overrightarrow{u_r}$$

- Il y a invariance par toute rotation ce qui entraîne que $\vec{E}(M,t) = E(r,t)\,\vec{u_r}$

On a donc :

$$\mathrm{div}\,\vec{E}(M,t) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E(r,t)}{\partial r} = \frac{\rho(r,t)}{\varepsilon_0}$$

Deux cas se présentent :

- Si $r < R + vt$:

$$\frac{\partial(r^2E(r,t)}{\partial r} = \frac{ne}{4\pi\varepsilon_0\,v} \implies E(r,t) = \frac{ne}{4\pi\varepsilon_0\,v\,r} + \frac{C_1(t)}{r^2}$$

- Si $r > R + vt$:

$$\frac{\partial(r^2E(r,t)}{\partial r} = 0 \implies E(r,t) = \frac{C_2(t)}{r^2}$$

Comme la charge électrique se conserve, la charge contenue dans la sphère de rayon $r > vt$ est nulle (la charge positive des positons émis compense la charge négative acquise par la boule de rayon R qui émet les positons). Le théorème de Gauss implique alors que, pour tout $t > 0$:

$$4\pi r^2\,E(r,t) = 4\pi C_2(t) = \frac{Q_{\mathrm{int}(t)}}{\varepsilon_0} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{C_2(t) = 0}$$

On affirme ensuite la continuité de $E(r,t)$ en $r = R + vt$ pour trouver :

$$E(r = R + vt, t) = \frac{ne}{4\pi\varepsilon_0\,v\,(R+vt)} + \frac{C_1(t)}{(R+vt)^2} = 0$$

d'où :

$$\boxed{C_1(t) = -\,\frac{ne\,(R+vt)}{4\pi\varepsilon_0\,v}}$$

Finalement on obtient :

$$\boxed{E(r,t) = \frac{ne}{4\pi\varepsilon_0\,v}\,\frac{1}{r}\left(1 - \frac{R+vt}{r}\right) \quad \text{si} \quad r < R + vt}$$

et

$$\boxed{E(r,t) = 0 \quad \text{si} \quad r > R + vt}$$

En ce qui concerne le champ magnétique, **il est nul par symétrie** : tout plan contenant OM est un plan de symétrie des charges et des courants contenant M et donc un plan d'antisymétrie de $\vec{B}$ qui doit donc être orthogonal à tous ces plans.

3) *Quelle est la charge électrique $Q(t)$ de la boule radioactive à l'instant t ? Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de Gauss.*

À l'instant t la boule a émis une charge $Q_{\text{ém}}(t) = ent$. La conservation de la charge électrique impose alors que :

$$\boxed{Q(t) = -\,ent}$$

D'autre part, le théorème de Gauss appliqué à la sphère de rayon R conduit à :

$$E(R,t)\,4\pi R^2 = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$$

d'où :

$$Q(t) = \frac{ne}{v}\,R\left(1 - \frac{R+vt}{R}\right) = -\,ent$$

On retrouve donc bien le même résultat.