

DM n°12 (Niveau CCINP)

Pour le vendredi 2 février 2024

1 Chimie*Données à 25°C* : enthalpies standard de formation et entropies molaires standard

Constituant	$\text{Cl}_{2(g)}$	$\text{PCl}_{3(g)}$	$\text{PCl}_{5(g)}$
$\Delta_f H^0$ (kJ.mol ⁻¹)		- 287,0	- 374,9
S_m^0 (J.K ⁻¹ .mol ⁻¹)	223,0	311,7	364,5

On se place dans l'approximation d'Ellingham.

On considère l'équilibre suivant : $\text{PCl}_{5(g)} = \text{PCl}_{3(g)} + \text{Cl}_{2(g)}$.

- 1) En supposant le système fermé, indiquer l'influence :
 - a) d'une élévation isobare de température.
 - b) D'une augmentation isobare de pression.
 - c) D'une introduction isotherme et isobare de :
 $\alpha)$ $\text{Cl}_{2(g)}$ $\beta)$ $\text{PCl}_{5(g)}$ $\gamma)$ d'un gaz inactif
- 2) Déterminer la constante d'équilibre à 500 K.
- 3) Sous une pression constante $P = 3,0$ bar et à 500 K, on mélange 0,1 mol de Cl_2 , 0,4 mol de PCl_3 et 0,15 mol de PCl_5 .
 - a) Dans quel sens évolue le système ?
 - b) Déterminer la composition du système à l'équilibre.

2 Propagation d'un influx nerveux dans un axone



IV.A – Modèle électrique des fibres nerveuses

Les axones (ou fibres nerveuses) les plus simples sont formés d'une membrane lipidique enfermant un liquide physiologique riche en ions (l'axoplasme) et baignant dans un liquide cellulaire également riche en ions. Un axone est modélisé par un cylindre de longueur importante par rapport à son diamètre. La différence de potentiel entre l'axoplasme et le liquide extérieur est de l'ordre de -70 mV. Les données géométriques et électriques des constituants de l'axone sont données figure 3 (la résistivité électrique est l'inverse de la conductivité électrique).

Les propriétés passives de l'axone illustrées sur la figure 4 sont déterminées par :

- la résistance de l'axoplasme (R_a) s'opposant au passage du courant le long de l'axone ;
- la résistance de la membrane ($R_m = 1/G_m$) déterminant la fuite du courant ;
- la capacité de la membrane (C_m) capable d'emmagasiner des charges électriques à l'intérieur et à l'extérieur de la membrane.

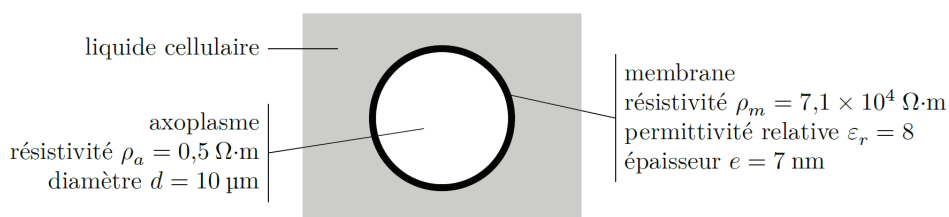


Figure 3 Vue en coupe schématisée d'un axone

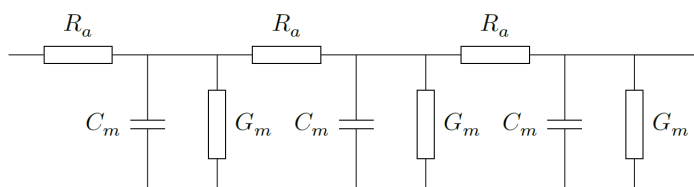


Figure 4 Circuit électrique équivalent de l'axone

Ainsi un axone peut être assimilé à un câble électrique imparfaitement isolé.

IV.A.1) Déterminer r_a , la résistance électrique par unité de longueur de l'axoplasme. Effectuer l'application numérique.

IV.A.2) Quelle hypothèse peut-on faire quant au calcul de la capacité par unité de longueur c_m et de la conductance de fuite par unité de longueur g_m au vu de la valeur du rapport e/d ?

IV.A.3) Déterminer c_m (on remplacera ϵ_0 par $\epsilon_0 \epsilon_r$ dans les calculs) et g_m . Effectuer les applications numériques.

IV.B – Constante d'espace

Chaque longueur élémentaire de longueur dx de la fibre nerveuse est modélisée par une cellule représentée figure 5.

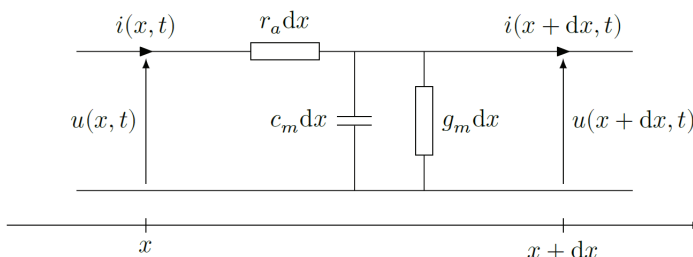


Figure 5 Schéma électrique élémentaire d'une fibre nerveuse

IV.B.1) Que devient ce schéma en régime permanent ?

IV.B.2) Déterminer les équations différentielles vérifiées par $u(x)$ et $i(x)$, puis celle vérifiée par $u(x)$ seulement. Faire apparaître une constante λ , appelée constante d'espace, homogène à une distance. Donner l'expression de λ . Effectuer l'application numérique.

IV.B.3) Exprimer $u(x)$ en fonction de $u(0)$ et de λ . Préciser la signification physique de λ .

IV.B.4) Certains axones sont entourés d'une gaine de myéline, sorte de graisse aux propriétés électriques isolantes. Des mesures de tension électrique peuvent être effectuées le long de telles fibres. On obtient des résultats du type de ceux présentés figure 6.

En déduire la conductance linéique de fuite de l'axone myélinisé (que l'on notera g'_m par la suite), puis la conductance linéique de la gaine de myéline seule. Conclure.

IV.C – Régime variable

On se place en régime dépendant du temps et on supposera que les axones sont myélinisés. On supposera dans un premier temps que la capacité linéique par unité de longueur de l'axone est inchangée par rapport à un axone non myélinisé.

IV.C.1) Déterminer les équations différentielles vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$ puis celle vérifiée par $u(x,t)$ seulement.

On envisage dans la suite une solution sous forme d'onde plane progressive monochromatique $\underline{u}(x,t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$.

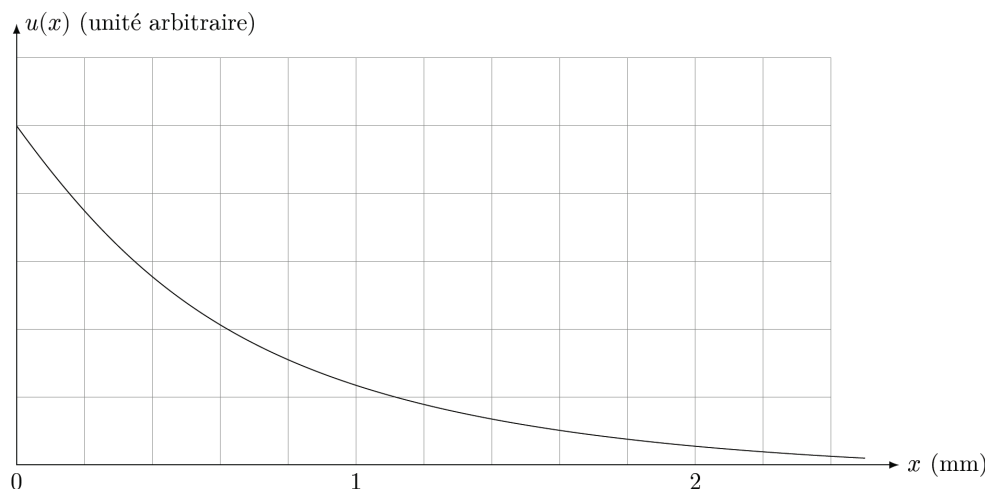


Figure 6 Évolution de la tension le long d'un axone myélinisé

IV.C.2) À quelle condition sur ω , c_m et g'_m l'équation différentielle vérifiée par $u(x, t)$ se simplifie-t-elle en $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = r_a c_m \frac{\partial u}{\partial t}$? À quelles fréquences cela correspond-il ? Conclure.

On supposera cette condition vérifiée par la suite.

IV.C.3) Quel est le phénomène décrit par cette équation ? Citer d'autres exemples analogues.

IV.C.4) Déterminer la relation de dispersion entre ω et k . Montrer que le milieu est dispersif et absorbant. Que valent les vitesses de phase et de groupe ? Quelle relation lie ces deux grandeurs ?

IV.C.5) Mettre en évidence une distance caractéristique d'atténuation. Commenter.

IV.D – Ça brûle !

Pour donner une explication et une image simpliste de la transmission des influx nerveux dans une fibre nerveuse, on pourrait dire que le signal électrique qui se propage par conduction électrique le long de l'axone, est ré-amplifié régulièrement (aux nœuds de Ranvier), ce qui le ralentit (cf. [figure 7](#)).

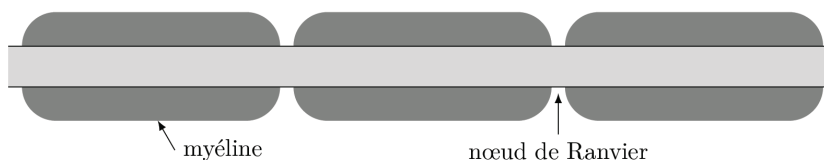


Figure 7 Schéma d'un axone myélinisé et nœuds de Ranvier

Les fibres nerveuses connectées aux cellules sensibles à la douleur sont entourées d'une gaine de myéline (dont la capacité linéique c'_m est inférieure à c_m), contrairement à celles sensibles à la chaleur. Expliquer pourquoi, lorsqu'on se brûle, on a mal avant d'avoir chaud.

Données numériques

Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Masse molaire de l'air	$M_{\text{air}} = 28,8 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Rapport des capacités thermiques massiques isobares et isochores de l'air	$\gamma = C_p/C_v = 1,40$

3 Effet Doppler

On décrit dans cette partie les différentes étapes permettant de mesurer la vitesse d'un véhicule à l'aide d'un radar fonctionnant sur le principe de l'effet Doppler. Dans les parties C, D, E, le radar émet une onde électromagnétique monochromatique de fréquence $f = 1,00 \text{ GHz}$ qui se propage dans l'air que l'on assimilera au vide. Dans la partie F, on s'intéresse à un radar modulé en fréquence. On donne : $c = 3,00.10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

Relations utiles :

$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{A})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta(\vec{A})$$

C Généralités sur les ondes électromagnétiques

C1. Quelle est la longueur d'onde associée à l'onde électromagnétique émise ? De quel domaine du spectre électromagnétique s'agit-il ?

On choisit de décrire cette onde électromagnétique comme une onde plane polarisée rectilignement se propageant dans le sens positif de l'axe (Oz) et dont le champ électrique en notation complexe est noté :

$$\vec{E}_i = E_{0i} \cdot e^{j(\omega t - kz)} \cdot \vec{e}_x$$

C2. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide.

C3. Établir l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

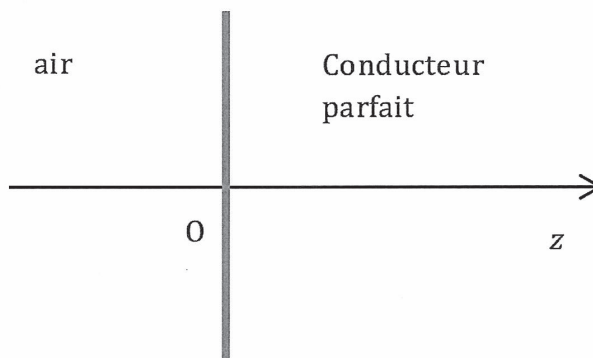
C4. En déduire la relation de dispersion : $\omega^2 = c^2 k^2$.

C5. Établir l'expression complexe du champ magnétique associé à cette onde électromagnétique.

C6. En déduire la valeur moyenne du vecteur de Poynting en fonction de l'amplitude E_{0i} du champ électrique. Que représente-t-elle ?

Cette onde rencontre maintenant en $z = 0$ et sous incidence normale un plan conducteur parfait occupant tout le demi-espace $z > 0$. Les relations de passage à l'interface entre deux milieux de natures différentes imposent :

- La continuité de la composante tangentielle du champ électrique.
- La continuité de la composante normale du champ magnétique.



C7. Rappeler l'hypothèse du modèle du conducteur parfait. Montrer que cette hypothèse implique que le champ électrique dans le demi-espace $z > 0$ est nul.

C8. En déduire l'existence d'une onde réfléchi ayant la même fréquence que l'onde incidente.

C9. Déterminer l'expression du champ électrique réfléchi dans le demi-espace $z < 0$.

L'effet Doppler est la modification de la fréquence d'une onde lorsque l'émetteur et le récepteur sont en mouvement relatif. Si la distance entre émetteur et récepteur diminue, la fréquence perçue est plus élevée que la fréquence émise par l'émetteur, et inversement.

D1. Citer un exemple de la vie courante illustrant l'effet Doppler.

On s'intéresse au cas de l'onde émise par le radar qui se réfléchit sur une voiture, modélisée par un plan conducteur parfait se déplaçant à une vitesse constante v en direction du radar.

On cherche à déterminer la fréquence de l'onde réfléchie par la voiture au niveau de l'antenne du radar. Pour cela, on choisit d'une part de garder un modèle d'onde plane pour l'onde émise, d'autre part de placer l'origine d'un axe (Oz') au niveau de l'antenne.



Au voisinage du radar, le champ électrique de l'onde émise a pour expression $\vec{E}_i(t, 0) = E_{0i} e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_x$. On appelle d_0 la distance entre la voiture et le radar à la date $t = 0$.

D2. Déterminer l'expression du champ incident au niveau de la voiture en fonction de E_{0i} , ω , c , v et d_0 .

D3. En déduire que l'onde reçue au niveau du véhicule a une fréquence apparente $f' = f \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right)$.

La relation précédente décrit l'effet Doppler dans le cas d'un émetteur fixe et d'un récepteur mobile se rapprochant à la vitesse v . Dans le cas opposé (récepteur fixe, émetteur se rapprochant à la vitesse v), la fréquence de l'onde réceptionnée est $f'' = \frac{f'}{1 - \frac{v}{c}}$.

D4. Montrer que dans le cas où $v \ll c$, la fréquence de l'onde réceptionnée après réflexion sur le véhicule s'exprime de manière approchée : $f_r \approx f + \frac{2vf}{c}$. Dans la suite, on notera $f_D = \frac{2vf}{c}$.

D5. Comparer f et f_r pour des valeurs usuelles de v . Que penser d'une mesure directe de f_r dans le but d'en déduire f_D ?

E Mesure de la fréquence Doppler

On niveau de l'antenne du radar, on dispose de deux tensions sinusoïdales correspondant aux ondes électromagnétiques émise et réceptionnée par le radar.

On note :

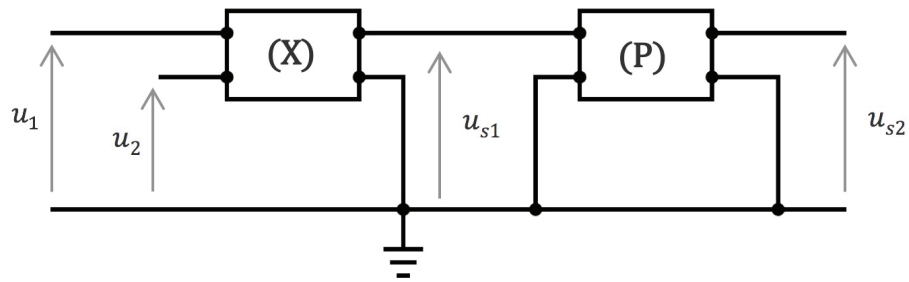
— $u_1(t) = u_{1m} \cos(\omega_1 t)$ la tension correspondant à l'onde émise ($\omega_1 = 2\pi \cdot f$).

— $u_2(t) = u_{2m} \cos(\omega_2 t + \phi)$ la tension correspondant à l'onde réfléchie ($\omega_2 = 2\pi \cdot f_r$).

On rappelle que les résultats de la partie D conduisent à définir une fréquence $f_D = f_r - f \ll f_r$ telle que $f_D \ll f_r$ et $f_D \ll f$ et ayant pour expression :

$$f_D = \frac{2 \cdot f \cdot v}{c}$$

Le schéma de principe de la mesure du décalage en fréquence f_D est donné ci-dessous :



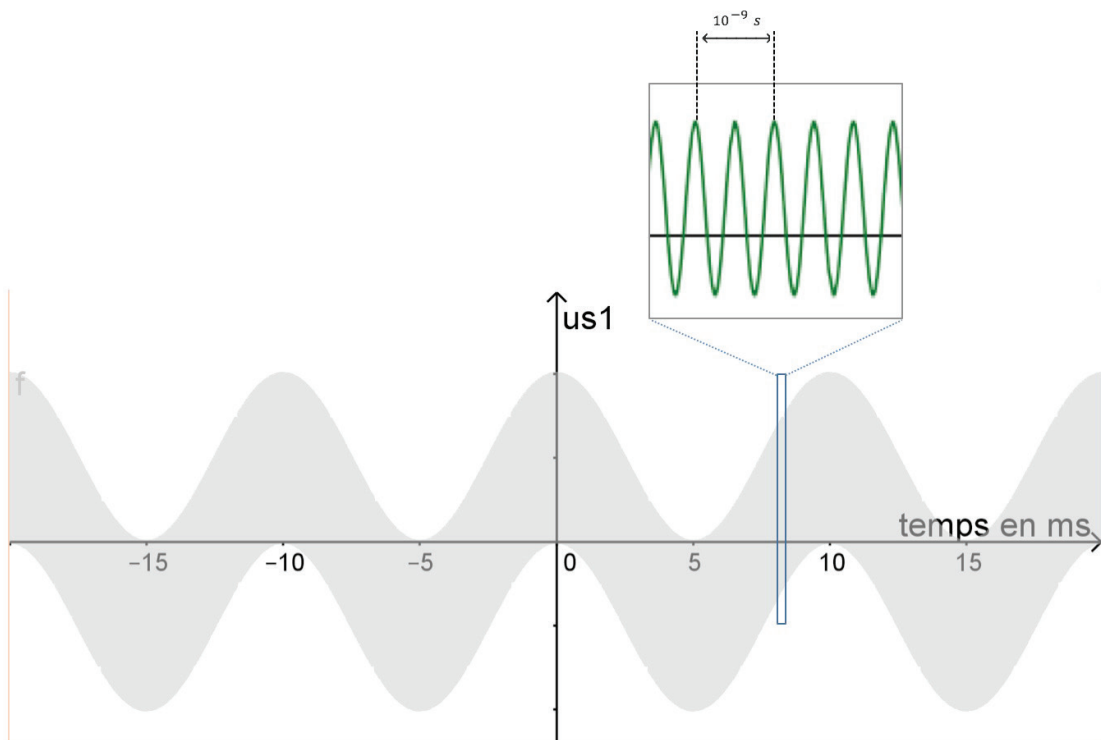
Le multiplieur (X) réalise l'opération : $u_{s1}(t) = K.u_1(t).u_2(t)$.

- E1.** Linéariser l'expression de $u_{s1}(t)$.
E2. En déduire l'allure du spectre en amplitude de la tension $u_{s1}(t)$.
E3. Quelle doit-être la fonction du quadripôle (P) pour obtenir une tension de sortie sous la forme :

$$u_{s2}(t) \approx K' \cos(2.\pi.f_D.t + \phi)$$

- E4.** Proposer, en justifiant, une structure électrique pour ce quadripôle ainsi que des valeurs réalistes pour les composants choisis si on veut mesurer des vitesses de l'ordre de 30 m.s^{-1} .

On donne ci-dessous la courbe représentant $u_{s1}(t)$ et un zoom sur une petite portion de celle-ci.



- E5.** Justifier l'allure de cette courbe.
E6. Représenter sur votre copie l'allure de la courbe $u_{s2}(t)$ en indiquant l'échelle de temps.
E7. Déterminer la vitesse de la voiture.