Corrigé exercice 5 : DIFFUSION THERMIQUE

5 Choc thermique

On considère un milieu homogène, de conductivité thermique λ, occupant le demi- espace $x > 0$. Pour $t < 0$, le champ de température dans le milieu est uniforme et égal à une constante T_0. À l'instant $t = 0$, la surface $x = 0$ est brusquement portée à la température T_1, puis maintenue à cette température (choc thermique). L'invariance de la situation par translation selon Oy et Oz entraîne que, pour $t > 0$, le champ de température ne dépend que de x et de t et vérifie l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2}$$

où D est la diffusivité thermique du milieu, supposée constante.

1. *Quelles sont les expressions de $T(x > 0, t = 0^+)$ (condition initiale) et de $T(x = 0, t > 0)$ (condition aux limites) ?*

   Pour $x > 0$ et à $t = 0^+$, la température n'a pas encore eu le temps d'évoluer suite au choc thermique. On a donc :

   $$\boxed{T(x > 0, t = 0^+) = T_0}$$

   En revanche, pour tout $t > 0$, le plan $x = 0$ est porté et maintenu à la température T_1, ce qui donne :

   $$\boxed{T(x = 0, t > 0) = T_1}$$

2. *On cherche une solution de l'équation de diffusion précédente sous la forme :*

   $$\mathrm{T}(x,t) = f(u) \quad \text{où} \quad u = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \quad \text{(variable sans dimension)}$$

a) *Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit la fonction $f(u)$ et vérifier qu'une solution est de la forme :*

$$f(u) = A + B\int_0^u \exp\left(-y^2\right)\,dy$$

où A et B sont deux constantes. On admettra qu'il s'agit de la solution générale de cette équation différentielle.

On va utiliser des connaissances sur le calcul des dérivées partielles des fonctions de deux variables. On rencontre aussi cela dans le chapitre sur les ondes électromagnétiques. On écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f'(u)\,\frac{\partial u}{\partial t} = f'(u)\,\frac{x}{2\sqrt{D}}\left(-\frac{1}{2t^{3/2}}\right) = -\,\frac{x}{4\sqrt{Dt}}\,\frac{1}{t}\,f'(u)$$

puis :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = f'(u)\,\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\,\frac{1}{2\sqrt{Dt}}$$

et donc :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{2\sqrt{Dt}}\,f''(u)\,\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4\,Dt}\,f''(u)$$

En reportant ces expressions dans l'équation de diffusion on obtient après simplification :

$$\boxed{-\,2u\,f'(u) = f''(u)}$$

On définit alors la fonction $g : u \longmapsto g(u) = f'(u)$ qui vérifie l'équation différentielle :

$$g'(u) = -\,2u\,g(u)$$

dont la solution générale est :

$$g(u) = B\,\exp(-u^2)$$

où B est une constante. On intègre une seconde fois pour trouver :

$$\boxed{f(u) = A + B\int_0^u \exp(-y^2)\,\mathrm{d}y}$$

y étant une variable muette et A une constante d'intégration qui représente d'ailleurs $f(0)$.

b) *Déterminer les expressions des constantes A et B en fonction de T_0 et T_1. On donne :*

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-y^2\right)\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Utilisons les deux conditions de la question 1.

- $x = 0$ et $t > 0$ correspond à $u = 0$. On a donc :

$$T(x=0, t>0) = T_1 = f(0) = A$$

- $x > 0$ et $t = 0^+$ correspond à $u \to +\infty$:

$$T(x>0, t=0^+) = T_0 = \lim_{u\to+\infty} f(u) = A + B\int_0^{+\infty} \exp(-y^2)\,\mathrm{d}y$$

d'où :

$$\boxed{A = T_1 \quad \text{et} \quad B = \frac{2\,(T_0 - T_1)}{\sqrt{\pi}}}$$

3. *Quelle est l'expression de la densité de courant thermique $j_Q(x,t)$ et en déduire sa valeur à la surface du matériau, en $x = 0$. Que peut-on en conclure ?*

D'après la loi de Fourier, projetée sur $\overrightarrow{u_x}$:

$$j_Q(x,t) = -\lambda\,\frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda f'(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

ce qui donne :

$$j_Q(x,t) = -\lambda\,\frac{2(T_0 - T_1)}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)\frac{1}{2\sqrt{Dt}}$$

ce qui donne :

$$\boxed{j_Q(x,t) = \lambda\,\frac{(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi D t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)}$$

En particulier si $x = 0$:

$$\boxed{j_Q(0,t) = \lambda\,\frac{(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi D t}}}$$

On remarque que $j_Q(0,t) \to +\infty$ si $t \to 0^+$: la discontinuité en température en $x = 0$ à l'instant initial engendre un flux thermique infini.

D'autre part, $j_Q(0,t) \to 0$ si $t \to +\infty$, ce qui est logique puisque la température va s'uniformiser peu à peu ce qui annule $\overrightarrow{j_Q}$ en tout point du milieu et, en particulier, en $x = 0$.

4. *Le milieu étudié est de l'aluminium dont la diffusivité thermique est D = 8,0.10^{-5} m^2.s^{-1}. On donne T_0 = 293 K et T_1 = 420 K. Calculer les instants t_1 et t_2 au bout desquels la température est égale à 90% de T_1 à des profondeurs x_1 = 1 cm et x_2 = 10 cm.*

Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs numériques de la fonction $u \mapsto F(u) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^u \exp\left(-y^2\right)\, dy$:

u	$F(u)$	u	$F(u)$	u	$F(u)$	u	$F(u)$
0	0	0,3	0,33	0,6	0,60	0,9	0,80
0,1	0,11	0,4	0,43	0,7	0,68	1,0	0,84
0,2	0,22	0,5	0,52	0,8	0,74	1,1	0,88

On cherche donc u tel que $f(u) = 0{,}90\,T_1$. Or, $f(u)$ peut s'écrire en fonction de $F(u)$:

$$f(u) = T_1 + (T_0 - T_1)\,F(u)$$

ce qui fait qu'on cherche donc u tel que :

$$F(u) = \frac{-\,0{,}1\,T_1}{T_0 - T_1} = 0{,}34$$

On lit dans le tableau : $u \approx 0{,}3$ ce qui donne les solutions :

$$\frac{x_1}{2\sqrt{Dt_1}} = \frac{x_2}{2\sqrt{Dt_2}} = 0{,}3$$

d'où :

$$\boxed{t_1 = \frac{x_1^2}{4 \times 0{,}3^2\,D} = 3{,}5 \text{ s} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{x_2^2}{4 \times 0{,}3^2\,D} \approx 350 \text{ s}}$$