Corrigé exercice 8 : DIFFUSION THERMIQUE

8 Résistance thermique d'un tube

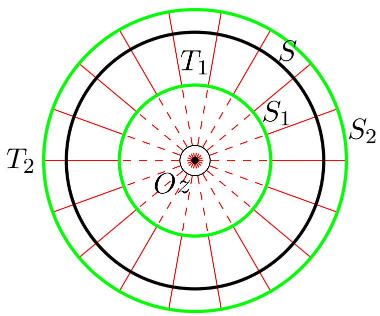
Un tube de longueur L = 1,0 m est limité par deux cylindres concentriques de rayons R_1 = 15 cm et R_2 = 25 cm respectivement maintenus aux températures constantes T_1 et T_2. Ce tube délimite un matériau homogène de conductivité thermique λ = 370 W.m^{-2}.K^{-1}. Sa longueur L étant très grande, les effets de bord sont négligeables et la température dans le tube ne dépend que de la distance r à l'axe de celui-ci. On étudie le régime permanent.

1. *Déterminer la résistance thermique R_{th} de ce tube.*

Soit Oz l'axe du tube : on utilise les coordonnées cylindriques $M(r,\theta,z)$. Comme $T(M) = T(r)$ en coordonnées cylindriques, on a :

$$\overrightarrow{j_Q}(r) = -\lambda\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{u_r}$$

Les lignes de champ sont donc radiales. En considérant la surface isotherme S_1 comme celle du cylindre de rayon R_1, les lignes de champ issues de chaque point de S_1 aboutissent toutes en en point du cylindre de rayon R_2, surface isotherme à T_2.



On résout l'équation de diffusion thermique en coordonnées cylindriques :

$$\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

et donc :

$$T(r) = A\ln(r) + B$$

où les constantes A et B sont déterminées par les conditions aux limites :

$$T_1 = T(R_1) = A\ln(R_1) + B \quad \text{et} \quad T_2 = T(R_2) = A\ln(R_2) + B$$

On en déduit :

$$T_2 - T_1 = A\,(\,\ln(R_2) - \ln(R_1)\,) \iff \boxed{A = \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)}}$$

ce qui entraîne :

$$\overrightarrow{j_Q}(r) = -\lambda\frac{A}{r}\,\overrightarrow{u_r} = \lambda\,\frac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}\frac{1}{r}\,\overrightarrow{u_r}$$

On prend alors une surface S intermédiaire entre S_1 et S_2 : cylindre de rayon r et on calcule le flux thermique à travers S :

$$\Phi_Q = \iint_S \overrightarrow{j_Q}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_S \lambda\,\frac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}\frac{1}{r}\,r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \lambda\,\frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \times 2\pi\,L$$

On vérifie bien que ce flux ne dépend pas de la position de S (c'est à dire de r) : conservation du flux de $\overrightarrow{j_Q}$ en régime permanent. On a donc :

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_Q} = \frac{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\,L\,\lambda} = 2{,}2.10^{-4}\ \mathrm{K.W^{-1}}}$$

Remarque : une résistance thermique s'exprime en K.W^{-1} (jamais en Ohms ...)

2. *On entoure le cylindre extérieur de rayon R_2 par une gaine isolante d'épaisseur $e = 3{,}0$ cm et de conductivité thermique $\lambda_g = 3{,}0$ W.m^{-2}.K^{-1}. La température du cylindre de rayon $R_2 + e$ est égale à T_2.*

   a) *Calculer la nouvelle résistance thermique R'_{th} de l'ensemble.*

   Il faut remarquer que le tube et la gaine forment une association de résistances thermiques <u>en série</u> : ils sont traversés par le même flux thermique.

   Par analogie, la résistance thermique de la gaine isolante est :

$$\boxed{R_{th,\text{gaine}} = \frac{\ln\left(\dfrac{R_2+e}{R_2}\right)}{2\pi\, L\, \lambda_g} = 6{,}0.10^{-3}\ \text{K.W}^{-1}}$$

   et donc :

$$\boxed{R'_{th} = \frac{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\, L\, \lambda} + \frac{\ln\left(\dfrac{R_2+e}{R_2}\right)}{2\pi\, L\, \lambda_g} = 6{,}2.10^{-3}\ \text{K.W}^{-1}}$$

   b) *Déterminer le rapport ϕ'_Q/ϕ_Q des flux thermiques avec la gaine isolante et sans la gaine isolante. Application numérique : calculer ce rapport.*

   On écrit la loi d'Ohm thermique, sans et avec la gaine :

   - <u>Sans la gaine</u> :
$$\phi_Q = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$
   - <u>Avec la gaine</u> :
$$\phi'_Q = \frac{T_1 - T_2}{R'_{th}}$$

d'où :

$$\boxed{\phi'_Q/\phi_Q = \frac{R_{th}}{R'_{th}} = 3{,}5.10^{-2}}$$

Ainsi la gaine joue bien son rôle d'isolant thermique en divisant le flux thermique par un facteur 30 environ.