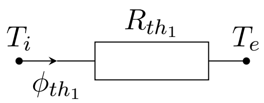
Corrigé exercice 9 : DIFFUSION THERMIQUE

9 Double vitrage

L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface S, orthogonale à l'axe Ox et dont le verre a une conductivité thermique λ. Ses faces internes et externes sont respectivement aux températures T_i et T_e avec $T_e < T_i$.

1. *La paroi est une simple vitre d'épaisseur $2e$. Déterminer le flux thermique ϕ_{th_1} sortant de la pièce par cette paroi en fonction de λ, S, e, T_i et T_e.*

   La vitre se comporte comme une résistance thermique $R_{th_1} = \frac{2e}{\lambda S}$ et soumise aux températures T_i et T_e :



   On a donc :

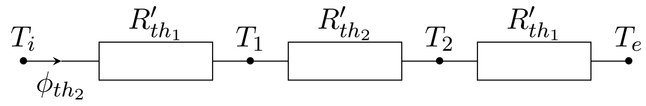
$$\boxed{\phi_{th_1} = \frac{T_i - T_e}{R_{th_1}} = \frac{\lambda S\,(T_i - T_e)}{2e}}$$

2. *La paroi est une double-vitre, ensemble de deux vitres de même épaisseur e séparées par une épaisseur e' d'air, de conductivité thermique λ_a (voir figure ci-dessous).*

   a) *Déterminer le flux thermique ϕ_{th_2} sortant de la pièce, puis le rapport ϕ_{th_2}/ϕ_{th_1}. Application numérique : calculer ce rapport avec : T_e = 270 K ; T_i = 292 K ; $e' = e$ = 3 mm ; λ = 1,2 W.m^{-1}.K^{-1} et λ_a = 0,025 W.m^{-1}.K^{-1}. Ce résultat vous semble-t-il réaliste ?*

Il y a maintenant trois résistances thermiques en série :

$$R'_{th_1} = \frac{e}{\lambda S} \;\; ; \;\; R'_{th_2} = \frac{e'}{\lambda_a S} \quad \text{et} \quad R'_{th_3} = R'_{th_1} = \frac{e}{\lambda S}$$



On a donc :

$$\boxed{\phi_{th_2} = \frac{T_i - T_e}{R'_{th_1} + R'_{th_2} + R'_{th_3}} = \frac{S\,(T_i - T_e)}{\frac{2e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_a}}}$$

d'où :

$$\boxed{\frac{\phi_{th_2}}{\phi_{th_1}} = \frac{\frac{2e}{\lambda}}{\frac{2e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_a}} \overset{AN}{=} 4.10^{-2}}$$

Le double vitrage réduit les pertes thermiques de façon significative.

   b) *Déterminer les températures T_1 et T_2 des faces en regard des deux vitres avec les données numériques ci-dessus. Représenter graphiquement les variations de la température en fonction de x dans le double vitrage.*

On applique le théorème pont diviseur de tension (cf schéma électrocinétique ci-dessus) :

$$T_i - T_1 = \frac{R'_{th_1}}{R'_{th_1} + R'_{th_2} + R'_{th_3}}(T_i - T_e) = \frac{\frac{e}{\lambda}}{\frac{2e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_a}}(T_i - T_e)$$

et

$$T_2 - T_e = \frac{R'_{th_1}}{R'_{th_1} + R'_{th_2} + R'_{th_3}}(T_i - T_e) = \frac{\frac{e}{\lambda}}{\frac{2e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_a}}(T_i - T_e)$$

On en déduit que :

$$\boxed{T_1 = T_i - \frac{\frac{e}{\lambda}}{\frac{2e}{\lambda}+\frac{e'}{\lambda_a}}(T_i - T_e) \overset{AN}{=} 291{,}6 \text{ K}}$$

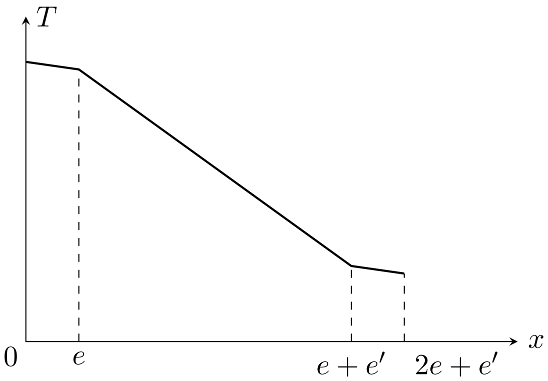
et

$$\boxed{T_2 = T_e + \frac{\frac{e}{\lambda}}{\frac{2e}{\lambda}+\frac{e'}{\lambda_a}}(T_i - T_e) \overset{AN}{=} 270{,}4 \text{ K}}$$

En régime stationnaire, la température dans un milieu homogène sans terme source (donc dans chaque vitre et dans l'air) obéit à l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow T(x) = Ax + B$$

Ainsi la température dans chacun des trois milieux est une fonction affine de x. La représentation de T en fonction de x sera donc formée de **segments de droites**.



On remarque que c'est l'air entre les deux vitres qui "encaisse" la plus forte diminution de température.

3. *En plus de la conduction étudiée ci-dessus, on doit tenir compte des échanges superficiels de chaleur entre un solide et le fluide avec lequel il est en contact. Une surface d'aire S du solide, à la température T_S échange avec le fluide à la température T_f la puissance thermique : $P_{th} = hS \mid T_S - T_f \mid$ avec $h > 0$.*

   a) *Quelle valeur implicite donnait-on précédemment à h lorsqu'on confondait T_S et T_f ?*

   Cela revient à faire $h \longrightarrow +\infty$.

   b) *Montrer que ces échanges superficiels introduisent une résistance thermique R_{th} et donner son expression.*

   Le flux thermique à l'interface entre le solide et le fluide vérifie l'équation :

$$\phi = hS\,(T_S - T_f) \quad \text{d'où} \quad T_S - T_f = \frac{1}{hS}\,\phi$$

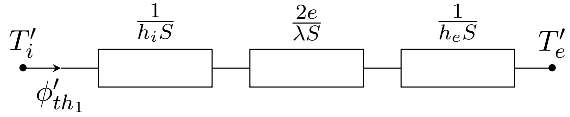
   Tout se passe donc comme si on avait une résistance thermique, dite de conducto-convection :

$$\boxed{R_{th,cc} = \frac{1}{hS}}$$

   c) *Les températures de l'air à l'intérieur de la pièce et à l'extérieur sont respectivement T'_i et T'_e. Soient h_e le coefficient à l'interface verre-air extérieur et h_i celui relatif aux autres contacts air- verre.*
   Déterminer les flux ϕ'_{th_1} (vitre simple) et ϕ'_{th_2} (double vitrage) en fonction de T'_i, T'_e, h_i, h_e et des paramètres e, λ, λ_a et S.
   Application numérique : $h_i = 10$ $W.m^{-2}.K^{-1}$; $h_e = 14$ $W.m^{-2}.K^{-1}$. Calculer $\phi'_{th_2}/\phi'_{th_1}$. Conclusion ?

   Il faut maintenant ajouter les résistances thermiques de conducto-convection.

- **Cas du simple vitrage** :

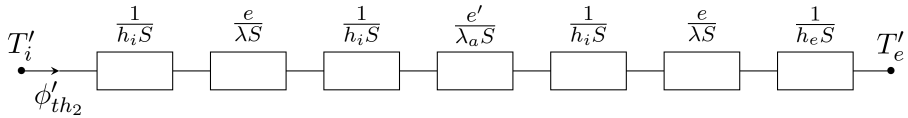


d'où :

$$\phi'_{th_1} = \frac{S\,(T'_i - T'_e)}{\frac{1}{h_i} + \frac{2e}{\lambda} + \frac{1}{h_e}}$$

- **Cas du double vitrage** :

Il ne faut oublier aucune résistance thermique de conducto-convection aux interfaces air-verre (il y en a 4 en tout).



d'où :

$$\phi'_{th_2} = \frac{S\,(T'_i - T'_e)}{\frac{3}{h_i} + \frac{2e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_a} + \frac{1}{h_e}}$$

On a donc :

$$\boxed{\frac{\phi'_{th_2}}{\phi'_{th_1}} = \frac{\frac{1}{h_i} + \frac{2e}{\lambda} + \frac{1}{h_e}}{\frac{3}{h_i} + \frac{2e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_a} + \frac{1}{h_e}} \overset{AN}{=} 0{,}35}$$

Ainsi la réduction n'est finalement que d'un facteur 3 (ce qui n'est pas négligeable non plus).