Résolution numérique de l'équation de diffusion thermique

I. Mise en équation

1) Le contexte

On souhaite résoudre numériquement l'équation de diffusion thermique unidimensionnelle, sans terme source :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \tag{1}$$

où $D = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ est le coefficient de diffusion thermique.

On illustre cela avec l'exemple d'une barre métallique cylindrique d'axe Ox, de longueur L et de section S, isolée thermiquement sur toute sa surface latérale. Cette barre est réalisée avec du cuivre dont les paramètres physiques sont :

- masse volumique : $\rho = 8{,}96\times10^3$ kg.m^{-3}
- conductivité thermique $\lambda = 401$ W.K^{-1}.m
- capacité thermique massique : $c = 380$ J.kg^{-1}.K^{-1}

La section de la barre est supposée suffisament petite pour pouvoir supposer que la température s'y écrit : $T = T(x,t)$. On suppose que, pour des instants $t \leqslant 0$, la température est uniforme :

$$\boxed{\forall\, t \leqslant 0, \forall\, x \in [0,L],\ T(x,t) = T_0} \tag{2}$$

Deux types de conditions aux limites sont étudiées :

a) Pour $t > 0$, les températures aux deux extrémités de la barre sont imposées (par deux thermostats par exemple) :

$$\boxed{\forall\, t > 0,\ T(0,t) = T_1 \quad \text{et} \quad T_(L,t) = T_2} \tag{3}$$

où T_1 et T_2 sont deux températures constantes.

FIGURE 1 – Les températures de la barre sont imposées aux deux extrémités grâce à deux thermostats.

b) Pour $t > 0$, seule la température en $x = L$ est imposée par un thermostat :

$$\boxed{\forall\, t > 0,\ T(L,t) = T_2} \tag{4}$$

où T_2 est une température constante.

En $x = 0$, une cellule thermique à effet Peltier est collée sur la section de la barre ci qui permet d'imposer un flux thermique constant Φ_0 contrôlable par l'intensité électrique I qui alimente la cellule :

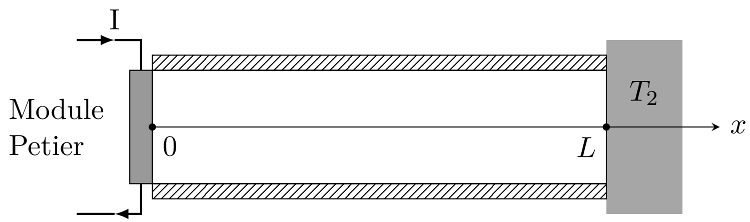

FIGURE 2 – Un module Peltier impose le flux thermique constant en $x = 0$ tandis qu'un thermostat impose la température de la barre en $x = L$.

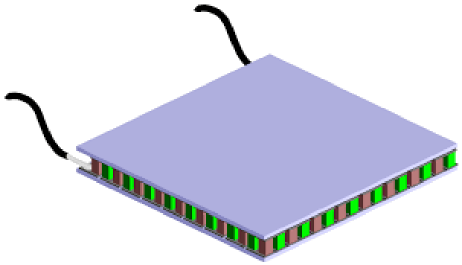

FIGURE 3 – Une cellule (ou module) Peltier.

2) Introduction d'un temps caractéristique τ_c

3) Cas particulier du régime stationnnaire

4) Discrétisation du problème

Afin de pouvoir résoudre le problème numériquement on introduit un pas de temps Δt et un pas de longueur Δx.

a) Pas de temps :

Les températures seront évaluées à des instant $t_k = k\,\Delta t$, avec $k \in \mathbb{N}$.

b) Pas de distance :

On subdivise l'intervalle $[0, L]$ en introduisant N points $(x_n)_{0 \leqslant n \leqslant N-1}$ de sorte que $x_n = n\,\Delta x$, avec $x_0 = 0$ et $x_{N-1} = L$.

5) Mise en équation