

Corrigé du DM n°12 CCINP - e3a

1 Chimie

On considère l'équilibre suivant : $\text{PCl}_{5(g)} = \text{PCl}_{3(g)} + \text{Cl}_{2(g)}$.

1) a) On calcule $\Delta_r H^0$ à l'aide de la loi de Hess :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{PCl}_3) + \Delta_f H^0(\text{Cl}_2) - \Delta_f H^0(\text{PCl}_5) = -287,0 + 374,9 = 77,9 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

Comme $\Delta_r H^0 > 0$, la loi de Van't Hoff indique qu'une élévation isobare de température déplace l'équilibre chimique dans le sens direct \rightarrow .

b) La loi de Le Châtelier indique qu'une augmentation isotherme de pression déplace l'équilibre dans le sens d'une diminution du nombre de moles de gaz, c'est à dire dans le sens indirect \leftarrow .

c) On part d'un état 1 qui est un état d'équilibre chimique :

$$Q_{r1} = \frac{a_{\text{Cl}_2} a_{\text{PCl}_3}}{a_{\text{PCl}_5}} = \frac{n_{\text{PCl}_3} n_{\text{Cl}_2}}{n_{\text{PCl}_5} n_g} \frac{P_1}{P^o} = K^o(T_1)$$

α) L'introduction isotherme et isobare de n_0 moles de $\text{Cl}_{2(g)}$ transforme le quotient réactionnel en Q_{r2} sans changer la constante d'équilibre. On a :

$$Q_{r2} = \frac{n_{\text{PCl}_3} (n_{\text{Cl}_2} + n_0)}{n_{\text{PCl}_5} (n_g + n_0)} \frac{P_1}{P^o}$$

On compare les deux quotients réactionnels :

$$\frac{Q_{r2}}{Q_{r1}} = \frac{(n_{\text{Cl}_2} + n_0) n_g}{n_{\text{Cl}_2} (n_g + n_0)}$$

On peut étudier la fonction $f : n_0 \mapsto \ln\left(\frac{Q_{r2}}{Q_{r1}}\right)$. Sa dérivée s'écrit :

$$f'(n_0) = \frac{1}{n_{\text{Cl}_2} + n_0} - \frac{1}{n_g + n_0} = \frac{n_g - n_{\text{Cl}_2}}{(n_{\text{Cl}_2} + n_0)(n_g + n_0)} > 0$$

Ainsi f est strictement croissante et comme $f(0) = 1$ on a $f(n_0) > 1$ d'où $\frac{Q_{r2}}{Q_{r1}} > 1$. Le système doit donc rejoindre son état d'équilibre par un déplacement dans le sens indirect \leftarrow .

β) On voit tout de suite que $Q_{r2} < Q_{r1}$. Le système rejoint son équilibre par un déplacement dans le sens direct \rightarrow .

γ) Ici de même, $Q_{r2} < Q_{r1}$ donc déplacement dans le sens direct \rightarrow .

2) On commence par calculer $\Delta_r S^0 = S_m^0(\text{PCl}_3) + S_m^0(\text{Cl}_2) - S_m^0(\text{PCl}_5) = 311,7 + 223,0 - 364,5 = 170,2 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$. On en déduit à 500K :

$$\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0 = -7200 \text{ J.mol}^{-1}$$

d'où :

$$K^o = e^{-\Delta_r G^0/RT} = 5,65$$

3) Sous une pression constante $P = 3,0$ bar et à 500 K, on mélange $0,1$ mol de Cl_2 , $0,4$ mol de PCl_3 et $0,15$ mol de PCl_5 .

a) On calcule le quotient réactionnel dans l'état initial :

$$Q_{rI} = \frac{n_{\text{PCl}_3} n_{\text{Cl}_2}}{n_{\text{PCl}_5} n_g} \frac{P_1}{P^o} = \frac{0,1 \times 0,4}{0,15 \times 0,65} \frac{3}{1} = 1,23 < K^o$$

Le système évolue donc dans le sens direct \rightarrow .

b) À l'équilibre chimique la loi d'action des masses conduit à :

$$Q_{r,\text{éq}} = \frac{(0,1 + \xi)(0,4 + \xi)}{(0,15 - \xi)(0,65 + \xi)} \frac{3}{1} = K^o = 5,65$$

ce qui conduit grâce à un solveur à $\xi = 8,5 \times 10^{-2}$ mol.

2 Propagation d'un influx nerveux dans un axone

IV.A – Modèle électrique des fibres nerveuses

IV.A.1) L'axoplasme étant un conducteur cylindrique, $r_a = \rho_a \frac{l}{S}$, avec $l = 1$ m et $S = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{10^2}{4} \approx 78 (\mu\text{m})^2$.

A.N. : $r_a = 0,5 \frac{1}{78 \cdot 10^{-12}} \approx 6,4 \cdot 10^9 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$ (très élevée car le milieu est peu conducteur et la section est très faible).

IV.A.2) $e/d \ll 1$: la membrane, très fine devant le rayon de courbure, est localement quasi plane, de sorte que sa capacité totale (par unité de longueur) peut être considérée résultant de l'association en parallèle de condensateur plans d'épaisseur e et de surface équivalente totale $\pi d \times (1 \text{ m})$ (les capacités s'additionnent).

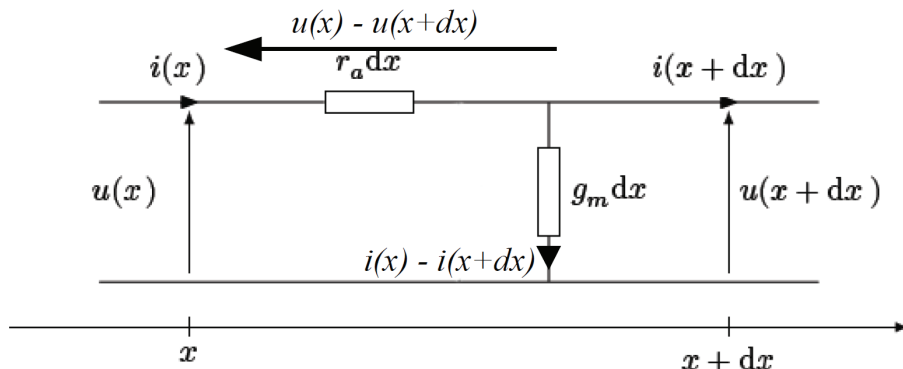
De même, la conductance totale (par unité de longueur) est la somme des conductances des éléments quasi plans en parallèle, de même épaisseur e et de surface équivalente totale $\pi d \times (1 \text{ m})$.

$$\text{IV.A.3) } \boxed{c_m = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\pi d}{e}} \text{ et } \boxed{g_m = \frac{1}{\rho_m} \frac{\pi d}{e}}.$$

A.N. : $c_m = 8,85 \cdot 10^{-12} \times 8 \times \frac{\pi \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-9}} \approx 0,32 \mu\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$, et $g_m = \frac{1}{7,1 \cdot 10^4} \times \frac{\pi \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-9}} \approx 63 \text{ mS} \cdot \text{m}^{-1}$.

IV.B – Constante d'espace

IV.B.1) En régime permanent, ne restent que les résistances :

IV.B.2) Loi d'Ohm pour $r_a dx$: $u(x) - u(x + dx) = r_a dx i(x)$;et pour $g_m dx$: $i(x) - i(x + dx) = g_m dx u(x + dx)$,

d'où les équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{du(x)}{dx} = -r_a i(x) \\ \frac{di(x + dx)}{dx} = -g_m u(x + dx) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{du(x)}{dx} = -r_a i(x) \\ \frac{di(x)}{dx} = -g_m u(x) \end{cases}$$

puisque la deuxième relation du système, établie à la sortie de la cellule (en $x + dx$), est également vérifiée à l'entrée (x), par récurrence de la chaîne.

On élimine i en dérivant la première équation et en substituant $\frac{di(x)}{dx}$.

$u(x)$ vérifie donc : $\frac{d^2u(x)}{dx^2} = r_a g_m u(x) = \frac{u(x)}{\lambda^2}$, où $\lambda = \frac{1}{\sqrt{r_a g_m}}$ est la constante d'espace, homogène à

une distance.

$$\text{A.N. : } \lambda = \frac{1}{\sqrt{6,4 \cdot 10^9 \times 63 \cdot 10^{-3}}} \approx 50 \text{ } \mu\text{m.}$$

IV.B.3) $u(x) = A \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) + B \exp\left(+\frac{x}{\lambda}\right)$: on élimine d'emblée l'exponentielle croissante car le système est passif, donc la limite à l'infini de u ne peut pas être infinie : $B = 0$.

$$u(x) = u(0) \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) : \lambda \text{ est la distance caractéristique de l'atténuation de l'influx.}$$

IV.B.4) La myéline entourant l'axone ne fait que modifier la valeur de g_m , remplacée par g'_m .

La courbe de la figure 6 permet de calculer $\lambda' = \frac{1}{\sqrt{r_a g'_m}}$, par exemple en écrivant que

$$\boxed{\frac{u(0,5\text{mm})}{u(0)} \approx \frac{1}{2}}$$
 (ou bien en repérant l'intersection de la tangente à l'origine avec l'axe des abscisses),

ce qui donne $\lambda' = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{\ln 2} \approx 0,72 \text{ mm}$.

En prenant $x = 1 \text{ mm}$, on obtient plutôt $0,66 \text{ mm}$... L'allure exponentielle ne semble que grossièrement respectée, donc on arrondira la valeur de λ' à $0,7 \text{ mm}$.

On en déduit $g'_m = \frac{1}{r_a \lambda'^2} = \frac{1}{6,4 \cdot 10^9 \times (0,7 \cdot 10^{-3})^2} \approx 0,3 \text{ mS} \cdot \text{m}^{-1}$: la conductance de fuite de l'axone myélinisé est beaucoup plus faible que celle de l'axone seul.

La myéline entourant l'axone, les deux résistances linéiques s'additionnent :

$$\boxed{\frac{1}{g'_m} = \frac{1}{g_m} + \frac{1}{g_{m,\text{myéline}}}} \Leftrightarrow g_{m,\text{myéline}} = \frac{1}{\frac{1}{g'_m} - \frac{1}{g_m}} = \frac{1}{\frac{1}{0,3 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{63 \cdot 10^{-3}}} \approx 0,3 \text{ mS} \cdot \text{m}^{-1} \approx g'_m.$$

IV.C – Régime variable

IV.C.1) Loi d'Ohm pour $r_a dx$: $u(x,t) - u(x+dx,t) = r_a dx i(x,t)$.

La caractéristique de l'association parallèle conductance-capacité s'écrit :

$$i(x,t) - i(x+dx,t) = i_{cm} + i_{gm} = c_m dx \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} + g'_m dx u(x+dx,t),$$

d'où les équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -r_a i(x,t) \\ \frac{\partial i(x+dx,t)}{\partial x} = -c_m \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} - g'_m u(x+dx,t) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -r_a i(x,t) \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -c_m \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - g'_m u(x,t) \end{array} \right.$$

On élimine i en dérivant la première équation et en substituant $\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = r_a c_m \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + r_a g'_m u(x,t)}$$

IV.C.2) On peut négliger le terme dû à la conductance de fuite lorsque

$$\left| \frac{g'_m u(x,t)}{c_m \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}} \right| \ll 1 \Leftrightarrow \frac{g'_m}{c_m} \left| \frac{u(x,t)}{\omega u(x,t)} \right| \ll 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega \gg \frac{g'_m}{c_m}} \Leftrightarrow f \gg \frac{g'_m}{2\pi c_m} = \frac{0,30 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 0,32 \cdot 10^{-6}} \approx 150 \text{ Hz}.$$

L'approximation ne sera pas légitime pour les sons émis par un trombone dont la tessiture (Cf. ID 3) est en dehors du domaine de l'approximation

IV.C.3) L'EDP $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = r_a c_m \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ décrit un phénomène de diffusion (Cf. diffusions moléculaire ou thermique, propagation é.m. dans les métaux, ondes de viscosité,...).

IV.C.4) Pour $\underline{u}(x,t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$, elle entraîne $k^2 = -j\omega r_a c_m$ (relation de dispersion).

k^2 imaginaire implique que $k \in \mathbb{C}$: $k^2 = e^{-j\frac{\pi}{2}} \omega r_a c_m \Leftrightarrow k = \pm e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\omega r_a c_m} = \pm \frac{1-j}{\delta}$, avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega r_a c_m}}$.

. Le milieu est dispersif car la vitesse de phase dépend de la pulsation de l'onde. En effet,

$$v_\phi = \frac{\omega}{\Re(k)} = \omega \cdot \delta = \sqrt{\frac{2\omega}{r_a c_m}}.$$

. Le milieu est absorbant par effet Joule. L'onde est atténuée dans le sens de sa propagation puisque

$$\underline{u}(x,t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)} = u_0 \exp\left(j\left(\omega t - \left(\pm \frac{1-j}{\delta} x\right)\right)\right) = u_0 \exp\left(\mp \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(j\left(\omega t \mp \frac{x}{\delta}\right)\right).$$

. La vitesse de groupe est, par définition : $v_g = \frac{d\omega}{d\Re(k)}$.

Avec $\Re(k) = \pm \frac{1}{\delta} = \pm \sqrt{\frac{\omega r_a c_m}{2}}$, $v_g = \frac{1}{\left(\frac{d\Re(k)}{d\omega}\right)} = \pm \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_a c_m}{2\omega}}}$, donc $v_g = 2v_\phi$.

IV.C.5) $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega r_a c_m}}$ est une longueur caractéristique de l'atténuation. C'est une fonction décroissante de la fréquence.

IV.D – Ça brûle !

Les fibres nerveuse entourées de myéline ont une capacité linéique c''_m résultant de l'association en série de la myéline et de la fibre, donc $\frac{1}{c''_m} = \frac{1}{c_m} + \frac{1}{c'_m} > \frac{2}{c_m}$, car $c'_m < c_m$.

En conséquence, $c''_m < \frac{c_m}{2}$, de sorte que la vitesse de phase le long de la fibre entourée de myéline, sensible à la douleur, est nettement plus grande que celle de la fibre sans myéline, sensible à la chaleur.

3 Principe d'un radar à effet Doppler. e3a MP 2018

C. Généralités sur les ondes électromagnétiques

C1 $\lambda = \frac{c}{f}$ A.N. $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9} = 0,3 \text{ m.}$ Onde radio ou hertzienne.

C2 $\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t \end{cases} \quad \begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{cases}$
 Mais s'il faut comprendre "vide" avec $\rho=0$ et $\vec{j}=0$,
 on a alors $\text{div } \vec{E} = 0$ et $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

C3 $\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$ soit $-\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = -\Delta \vec{E}$
 et finalement $\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

On pose $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ pour obtenir l'eq de d'Alembert $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

C4 Pour une OPPM écrite en complexes, on a $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$
 et $\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$. Alors on en déduit $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$ soit $\omega^2 = k^2 c^2$

C3 (suite) il faut aussi faire le travail pour le champ \vec{B} ...

C5 Puisqu'on étudie une OPPM, l'équation de Maxwell-Faraday fournit la relation de structure $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k E_{0i}}{\omega} e^{j(\omega t - kz)} (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x)$

On en déduit $\vec{B} = B_{0i} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$ avec $B_{0i} = \frac{k E_{0i}}{\omega} = \frac{E_{0i}}{c}$

C7 La conductivité σ d'un conducteur parfait tend vers l'infini. Il en résulte une épaisseur de peau tendant vers zéro, ce qui revient à dire que les champs sont nuls dans le conducteur parfait.

(Je ne peux pas qu'on attende ici la démonstration de l'effet de peau jusqu'à $k^2 \approx j\omega\mu_0\sigma$ et $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$).

C8. $\vec{E}_i(z=0) = E_{0i} e^{j\omega t} \vec{e}_x$, tangentiel.

Mais le champ total, par continuité en $z=0$, doit avoir une composante selon x nulle en $z=0$.

Il existe donc un second champ, notons le \vec{E}_r , tel que $\vec{E}_i(z=0) + \vec{E}_r(z=0) = 0$. \vec{E}_r a donc même pulsation ω que \vec{E}_i .

(Notons que \vec{E}_r n'a pas de composante selon y en $z=0$ par continuité; enfin, si on admet que c'est une OPPM de direction z , dans le vide il n'a pas de composante selon z non plus).

C9 La relation de dispersion s'applique : le vecteur d'onde a même module k , mais il est de sens opposé...

$$\text{Alors } \boxed{\vec{E}_r = E_{0i} e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_x}$$

D. Effet Doppler

D1 La sirène d'une ambulance qui passe devant un piéton (donc s'approche, puis s'éloigne) illustre l'effet Doppler.

D2 On a, en un point z' , $\vec{E}_i(t, z') = E_{0i} e^{j\omega(t - \frac{z'}{c})} \vec{e}_x$.

Or, au niveau de la voiture, $z'_0 = d_0 - vt$.

$$\boxed{\vec{E}_i(t, z'_0(t)) = E_{0i} e^{j\omega[t(1 + \frac{v}{c}) - \frac{d_0}{c}]} \vec{e}_x}$$

D3 L'expression précédente laisse apparaître une pulsation $\omega' = \omega(1 + \frac{v}{c})$. Donc $\boxed{f' = f(1 + \frac{v}{c}) = \frac{\omega'}{2\pi}}$.

D4 Toujours en notant $z_0(t) = d_0 - vt$ la position de la voiture, le champ réfléchi s'écrit $\vec{E}_r(t, z') = E_{0i} e^{j\omega' [t + \frac{z' - z_0(t)}{c}]} \vec{e}_x$
 soit $\vec{E}_r(t, 0) = E_{0i} e^{j\omega' [t - \frac{d_0}{c} + \frac{vt}{c}]} \vec{e}_x$
 On en déduit $\omega_r = \omega' (1 + \frac{v}{c}) = \omega (1 + \frac{v}{c})^2 \approx \omega (1 + 2\frac{v}{c})$
 au 1^{er} ordre en $\frac{v}{c}$. En divisant par 2π : $f_r \approx f + 2\frac{v}{c}f$.

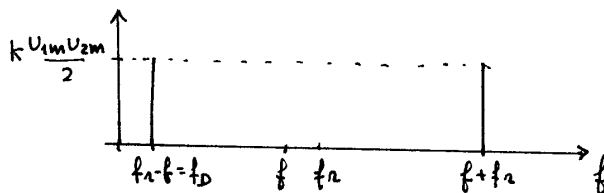
D5 $f = 1\text{GHz}$. $f_D = \frac{2v}{c}f \approx \frac{2 \times 30 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 200\text{Hz}$ ($30\text{ms}^{-1} = 108\text{km h}^{-1}$)
 Il faut donc 7 chiffres significatifs pour discriminer f et f_r . Une mesure directe sera trop délicate...

E. Mesure de la fréquence Doppler

E1 $u_{S1}(t) = K u_{1m} u_{2m} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \phi)$

$$u_{S1}(t) = K \frac{u_{1m} u_{2m}}{2} \left[\cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \phi] + \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi] \right]$$

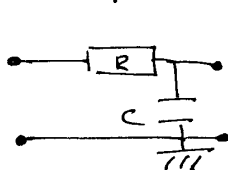
E2



E3 On veut un filtre passe-bas pour éliminer la fréquence $f + f_2$.

E4 f_D de l'ordre de quelques centaines de Hz.
 On peut choisir la fréquence de coupure f_c à partir du kHz (mais aussi du MHz : on a de la marge...)

Exemple de choix pour un passe-bas RC du 1^{er} ordre

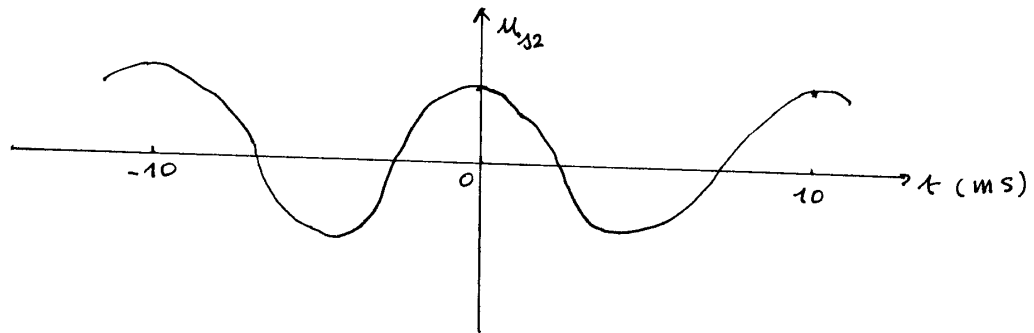


$$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{RC} = \frac{10^5}{2\pi} \text{ Hz}$$

avec $C = 10\text{nF}$ $R = 10^3 \Omega$.

E5 Le zoom laser a une fréquence rapide $f = \frac{2}{10^{-9}} = 2 \text{ GHz} \approx f_1 + f_2$
 et la courbe une oscillation lente de période $T = 10 \text{ ms}$,
 soit de fréquence $f_D = 100 \text{ Hz}$,
 conformes à l'expression de $u_{s1}(t)$ établie en E1.

E6 En filtrant les oscillations à haute fréquence, on obtient:



E7 $T = 10 \text{ ms} \Rightarrow f_D = 100 \text{ Hz}$

$$v = \frac{c}{2} \frac{\lambda_D}{\lambda}$$

A.N. $v = \frac{3 \cdot 10^8}{2} \cdot \frac{10^2}{10^9}$ $v = 15 \text{ m s}^{-1} = 54 \text{ km h}^{-1}$