

Machines thermiques et théorèmes de Carnot

Table des matières

I. Description des machines	1
1) Machines à écoulement de fluide	1
2) Moteurs à combustion	2
a) Description	2
b) Travail des actions du piston	3
c) Moteur idéalisé	4
d) Quelques exemples de cycles théoriques modèles	5
II. Théorèmes de Kelvin et de Carnot	7
1) Machine monotherme	7
2) Machines dithermes	7
a) Principe général	7
b) Diagramme de Raveau	8
c) Rendement d'un moteur ditherme. Premier théorème de Carnot.	9
d) Efficacités d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur. Second théorème de Carnot.	10
3) Le cycle de Carnot	11
a) Cas d'une masse m de fluide enfermée dans un cylindre limité par un piston	11
b) Cas d'un fluide en écoulement qui traverse différentes machines	13

I. Description des machines

Les machines thermiques (c'est à dire les machines dont le fonctionnement est basé sur la transformation de chaleur en travail ou bien de travail en chaleur) sont de deux types.

1) Machines à écoulement de fluide

Un fluide s'écoule en régime stationnaire dans un *circuit fermé*, en traversant des compresseurs, turbines, détendeurs, échangeurs thermiques, etc ... Les figures 1 et 2 en donnent deux exemples.

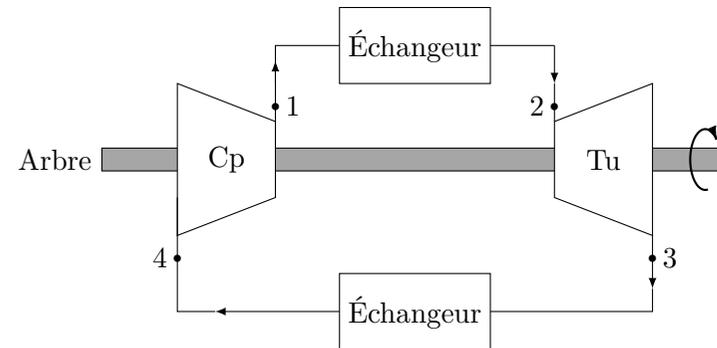


FIGURE 1 –

Les compresseur et turbine sont respectivement des appareils de compression et de détente qui, la plupart du temps, fonctionnent de façon adiabatique et qui contiennent des pièces mécaniques mobiles (vis) permettant de réaliser cette compression ou détente. Ces appareils possèdent un axe de rotation (arbre) qui fait tourner la vis de compression ou de détente.

Les échanges thermiques se font dans des échangeurs thermiques qui sont en fait de simples tuyaux à parois diathermanes, sans pièces

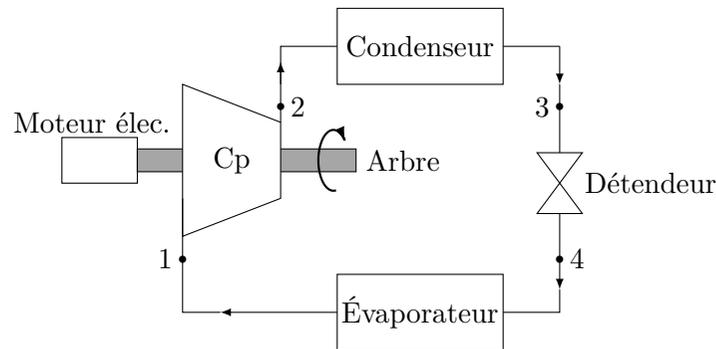


FIGURE 2 – Schéma de principe d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur couramment utilisés. Les condenseur et évaporateur sont des échangeurs thermiques. Le détendeur est un appareil de détente adiabatique du fluide sans aucune pièce mobile (principe de la détente de Joule-Thomson).

mobiles. Le fluide dans la machine s'écoule dans ces tuyaux en échangeant de la chaleur avec le milieu extérieur (ces tuyaux sont souvent réalisés en serpentant, afin d'avoir le maximum de surface d'échange).

2) Moteurs à combustion

a) Description

Dans les moteurs à combustion (moteurs de voitures, camions, ...), le fonctionnement est différent. Ces moteurs sont constitués de plusieurs cylindres dans lesquels peuvent coulisser des pistons. Le mouvement de translation de ces pistons est converti en un mouvement de rotation au moyen d'un système bielle-manivelle, ce qui entraîne le mouvement des roues du véhicule. Le principe est le suivant (figures 3 et 4) :

1. Phase d'admission :

Le piston étant en bas du cylindre (le volume de celui-ci étant alors égal à V_{\min} : volume résiduel), la soupape d'admission (S.A.) s'ouvre et le piston remonte en aspirant dans le cylindre une masse m de fluide inflammable (mélange air + essence) sous la pression atmosphérique P_a . Cette étape se poursuit jusqu'à ce que le piston atteigne son point le plus haut : le volume du cylindre est alors V_{\max} (volume maximum). À ce moment (S.A.) se ferme.

2. Phase de compression :

Le piston redescend ce qui a pour effet de comprimer le fluide dans le cylindre jusqu'à atteindre le volume V_{\min} .

3. Phase de combustion et de détente :

Au moment où le piston est au point le plus bas une étincelle (provoquée par la bougie du moteur) enflamme le mélange fluide (explosion) ce qui provoque une dilatation très importante du fluide, repoussant le piston jusqu'à son point haut de volume V_{\max} .

Dans un moteur Diesel, il n'y a pas d'étincelle : l'explosion est provoquée par la compression : lorsque le mélange fluide atteint une pression critique appelée pression d'explosion P_e (calculée pour être atteinte lorsque $V = V_{\min}$) le mélange s'auto-enflamme sans qu'il y ait besoin de déclencher cela au moyen d'une étincelle.

4. Phase de refoulement :

Au moment où le piston atteint son point le plus haut ($V = V_{\max}$), la soupape d'échappement (S.E.) s'ouvre ce qui a pour effet de ramener la pression des gaz brûlés à la pression atmosphérique P_a . La descente du piston provoque alors l'évacuation (refoulement) des gaz hors du cylindre.

Lorsque le piston est au plus bas, (S.E.) se ferme et la soupape d'admission (S.A.) s'ouvre, ce qui permet de commencer un nouveau cycle.

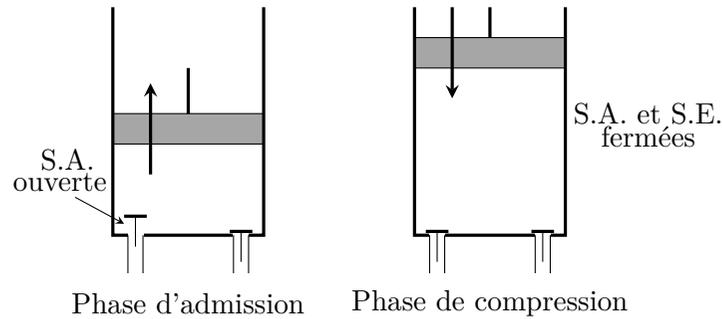


FIGURE 3 –

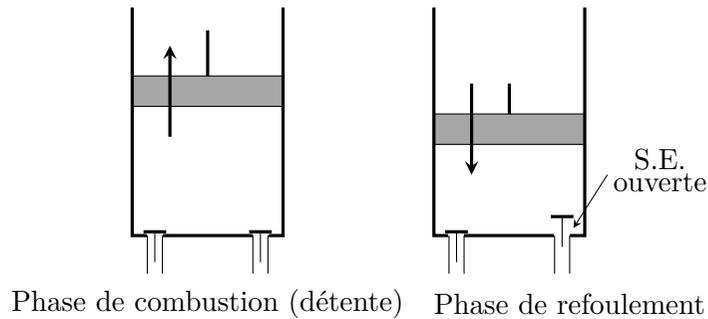


FIGURE 4 –

La représentation du processus se fait dans un **diagramme de Watt** : volume V du cylindre en abscisse et pression P en ordonnée.

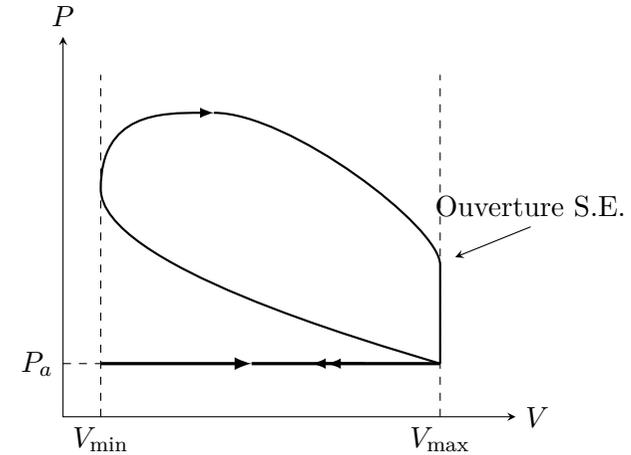


FIGURE 5 – Diagramme de Watt.

b) Travail des actions du piston

Évaluons le travail des forces exercées par le piston sur le fluide dans le cylindre (ce sont des forces de pression).

Phase d'admission :

Le fluide est introduit dans le cylindre à la pression atmosphérique P_a constante. La force exercée par le fluide sur le piston de surface S est $\vec{F}_{f \rightarrow p} = P_a S \vec{e}_x$.

En vertu du principe de l'action et de la réaction, la force exercée par le piston sur le fluide est $\vec{F}_{p \rightarrow f} = -P_a S \vec{e}_x$.

Lorsque le piston se déplace de $d\vec{\ell} = dx \vec{e}_x$, le travail élémentaire de cette force est :

$$\delta W_{\text{adm}} = \vec{F}_{p \rightarrow f} \cdot d\vec{\ell} = -P_a S dx$$

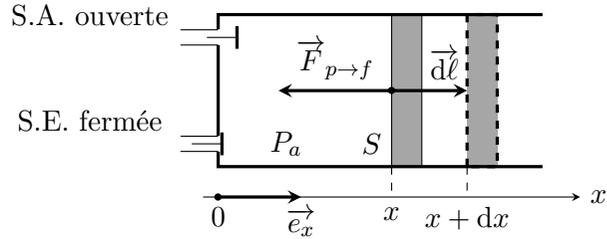


FIGURE 6 – Travail des forces de pression au cours de l'admission du fluide dans le cylindre.

Il s'ensuit que le travail total de cette force (travail d'admission) lorsque le piston se déplace de x_{\min} (correspondant à V_{\min}) à x_{\max} (correspondant à V_{\max}) s'écrit :

$$W_{\text{adm}} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} -P_a S dx = -P_a S (x_{\max} - x_{\min})$$

c'est à dire :

$$W_{\text{adm}} = -P_a (V_{\max} - V_{\min})$$

Phase de refoulement :

L'ouverture de la soupape de refoulement S.E. provoque quasi-instantanément une uniformisation de la pression des gaz brûlés à la pression atmosphérique P_a . Ces gaz sont évacués du cylindre à cette pression constante.

Le travail élémentaire des forces exercées par le piston sur le fluide au cours de cette étape s'écrit :

$$\delta W_{\text{ref}} = \vec{F}_{p \rightarrow f} \cdot \vec{d\ell} = -P_a S dx$$

ce qui donne un travail total de refoulement :

$$W_{\text{ref}} = \int_{x_{\max}}^{x_{\min}} -P_a S dx = -P_a S (x_{\min} - x_{\max})$$

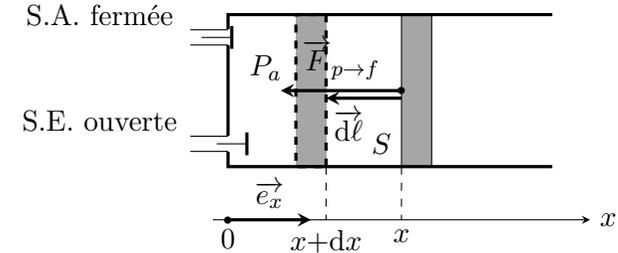


FIGURE 7 – Travail des forces de pression au cours du refoulement des gaz brûlés hors du cylindre.

soit :

$$W_{\text{ref}} = P_a (V_{\max} - V_{\min}) = -W_{\text{adm}}$$

Aller - retour du piston soupapes fermées

Le travail des forces de pression exercées par le piston sur le fluide sera noté $W_{u,\text{cycle}}$ (u pour utile car il s'agit du travail des actions exercées par une pièce mécanique mobile sur le fluide).

Conclusion : travail total pour un cycle de fonctionnement :

Le travail total des actions du piston pour un cycle de fonctionnement (admission - compression - combustion détente - refoulement) est la somme :

$$W_{\text{total}} = W_{\text{adm}} + W_{u,\text{cycle}} + W_{\text{ref}} = W_{u,\text{cycle}}$$

c) Moteur idéalisé

Si on applique le premier et second principe à la masse m de fluide contenue dans le cylindre lors d'un aller-retour du piston, soupapes fermées (il s'agit donc d'un système fermé!), on obtient en négligeant

l'énergie cinétique macroscopique et l'énergie potentielle de pesanteur :

$$U_F - U_I = W_{u,\text{cycle}} + Q \quad \text{et} \quad S_F - S_I = S_E + S_C$$

où Q est la chaleur échangée au cours de cette transformation (avec le milieu extérieur situé en dehors du cylindre!), S_E est l'entropie échangée et S_C l'entropie créée au cours de cette transformation.

Or $U_F \neq U_I$ et $S_F \neq S_I$ puisque même si le volume occupé (V_{\max}) et la pression (P_a) sont les mêmes, la température du fluide et surtout sa composition chimique ont changé! Il y a eu une réaction chimique de combustion et la température des gaz brûlés à l'ouverture de la soupape S.E. est beaucoup plus élevée que la température du fluide introduit dans le cylindre.

Plus précisément on a :

- Juste après la fermeture de S.A. : $P = P_a$, $V = V_{\max}$, $T = T_I$. L'énergie interne et l'entropie de la masse m de fluide s'écrivent :

$$U_I = U(T_I, P_a, \xi = 0) \quad \text{et} \quad S_I = S(T_I, P_a, \xi = 0)$$

où ξ est l'avancement de la réaction de combustion, nul au départ.

- Juste après l'ouverture de S.E. : $P = P_a$, $V = V_{\max}$, $T = T_F$. L'énergie interne et l'entropie de la masse m de fluide s'écrivent maintenant :

$$U_F = U(T_F, P_a, \xi = \xi_F) \quad \text{et} \quad S_F = S(T_F, P_a, \xi = \xi_F)$$

où ξ_F est l'avancement final de la réaction de combustion.

Afin de décrire correctement ce qui se passe, il faut donc utiliser **à la fois les lois de la thermodynamique et celles de la thermo-chimie**, ce qui dépasse le niveau du cours en CPGE.

Afin de contourner cette difficulté, on préfère remplacer la transformation réelle avec réaction chimique par une **transformation théorique fictive** avec :

- un fluide dont la nature chimique ne change pas au cours du cycle (il n'y a donc plus de réaction chimique) et qui *revient à son état initial* au bout d'un aller-retour du piston ;
- telle que la chaleur dégagée par la réaction de combustion soit remplacée par une chaleur $Q_1 > 0$ fournie par le milieu extérieur (hors cylindre) au cours d'une étape du cycle.

Avec ce modèle, les premier et second principes s'écrivent :

$$U_F - U_I = W_{u,\text{cycle}} + Q_1 + Q_2 = 0 \quad \text{et} \quad S_F - S_I = S_E + S_C = 0$$

puisque $U_F = U_I$ et $S_F = S_I$. $Q_1 > 0$ est la *chaleur reçue* par le fluide et $Q_2 < 0$ est la *chaleur cédée* par le fluide au cours du cycle. Le rendement thermodynamique du moteur est alors défini par :

$$r = \frac{|W_{u,\text{cycle}}|}{Q_1} = -\frac{W_{u,\text{cycle}}}{Q_1}$$

puisque $W_{u,\text{cycle}} < 0$.

d) Quelques exemples de cycles théoriques modèles

Plusieurs cycles théoriques modèles sont utilisés pour décrire l'évolution de la masse m de fluide dans le cylindre.

Cycle de Beau de Rochas :

Il est constitué :

- d'une transformation adiabatique $1 \rightarrow 2$: phase de compression du fluide par le piston. Le fluide n'a pas le temps d'échanger de la chaleur avec le milieu extérieur ;
- transformation isochore $2 \rightarrow 3$ qui modélise la phase de combustion : $Q_{23} = Q_1 > 0$ chaleur reçue par le fluide (dans la réalité cette chaleur est fournie par la réaction de combustion) ;

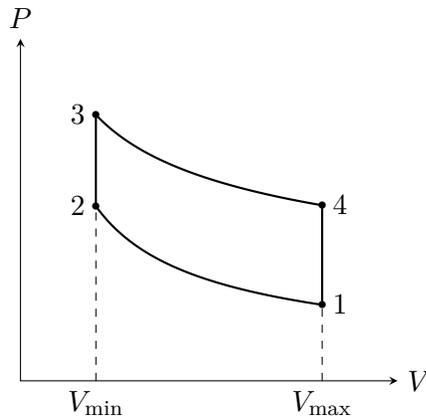


FIGURE 8 – Cycle de Beau de Rochas : deux isochores et deux adiabatiques.

- d'une transformation adiabatique $3 \rightarrow 4$: phase de détente très rapide des gaz où le piston est repoussé jusqu'à atteindre V_{\max} . Le fluide n'a pas le temps d'échanger de la chaleur avec le milieu extérieur ;
- transformation isochore $4 \rightarrow 1$ pour le retour à l'état initial. Au cours de cette étape, le fluide cède de la chaleur $Q_2 < 0$ au milieu extérieur.

Autre exemple :

- La phase de combustion est divisée en une transformation isochore $2 \rightarrow 3$ suivie d'une transformation isobare $3 \rightarrow 4$. On a donc $Q_1 = Q_{23} + Q_{34}$.
- Les autres transformations sont celles décrites dans le cycle de Beau de Rochas : $1 \rightarrow 2$ et $4 \rightarrow 5$ sont des transformations adiabatiques ; $4 \rightarrow 5$ est une transformation isochore qui ramène

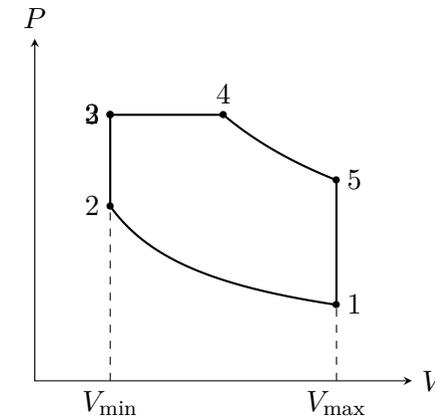


FIGURE 9 – Autre exemple de cycle moteur

le fluide à l'état initial en cédant une chaleur $Q_2 < 0$ au milieu extérieur.

II. Théorèmes de Kelvin et de Carnot

1) Machine monotherme

- Dans le cas d'une machine avec un fluide en écoulement, celui-ci n'échange de la chaleur que *dans un seul échangeur thermique au contact d'une source de température T_0* .

Si on note w_u la somme des travaux utiles massiques (on somme les travaux utiles de toutes les machines ayant des pièces mécaniques mobiles) et q la chaleur massique échangée avec la source dans l'échangeur thermique, alors la somme des bilans enthalpique et entropique conduit à :

$$w_u + q = 0 \quad \text{et} \quad \frac{q}{T_0} + s_C = 0$$

où s_C est l'entropie massique créée pour toute la machine. On a donc nécessairement :

$$q = -T_0 s_C \leq 0 \quad \text{et} \quad w_u = -q \geq 0$$

Remarque : dans le cas réversible ($s_C = 0$), on a forcément $q = 0$ et $w_u = 0$: il n'y a aucun échange d'énergie entre la machine et le milieu extérieur !

- Dans le cas d'un fluide enfermé dans un cylindre limité par un piston, en se plaçant dans le modèle où la nature chimique du fluide ne change pas, on suppose que la masse m de fluide n'échange de la chaleur Q qu'avec une source de température T_0 (située en dehors du cylindre).

En notant $W_{u,\text{cycle}}$ le travail des actions du piston au cours d'un cycle, les premier et second principes conduisent à :

$$W_{u,\text{cycle}} + Q = 0 \quad \text{et} \quad \frac{Q}{T_0} + S_C = 0$$

où S_C est l'entropie créée au cours d'un cycle. On a donc :

$$Q = -T_0 S_C \leq 0 \quad \text{et} \quad W_{u,\text{cycle}} = -Q \geq 0$$

Le théorème de Kelvin résume cela :

Théorème de Kelvin

Une machine thermique monotherme ne peut que recevoir du travail : $w_u > 0$ ou $W_{u,\text{cycle}} > 0$ et céder de la chaleur : $q < 0$ ou $Q < 0$. Autrement dit, *il n'existe pas de moteur monotherme.*

2) Machines dithermes

a) Principe général

- Dans le cas d'une machine avec fluide en écoulement, l'échange de chaleur se fait exclusivement au niveau de deux échangeurs thermiques respectivement en contact avec une source chaude T_C et une source froide $T_F < T_C$ (rappelons qu'un échangeur thermique est une machine sans pièce mécanique mobile).

Notons à nouveau w_u le travail massique utile total, q_C la chaleur massique échangée avec la source chaude et q_F la chaleur massique échangée avec la source froide. La somme des bilans enthalpie et entropique donne :

$$w_u + q_C + q_F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{q_C}{T_C} + \frac{q_F}{T_F} = -s_C \leq 0$$

- Dans le cas d'une masse m de fluide dans un cylindre limité par un piston on suppose que la nature chimique du fluide ne change pas et que celui-ci est porté successivement en contact avec une source chaude T_C et une source froide T_F (situées en dehors du cylindre) avec lesquelles il échange des chaleurs Q_C et Q_F (ce

qui rend les choses irréalistes!). Les premier et second principes appliqués à la masse m de fluide conduisent à :

$$W_{u,cycle} + Q_C + Q_F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = -S_C \leq 0$$

Remarque : les inégalités $\frac{q_C}{T_C} + \frac{q_F}{T_F} \leq 0$ ou $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$ s'appellent **inégalités de Clausius**.

b) Diagramme de Raveau

Un diagramme intéressant pour discuter les différentes possibilités est le *diagramme de Raveau* : q_C (ou Q_C) en abscisse et q_F (ou Q_F) en ordonnée.

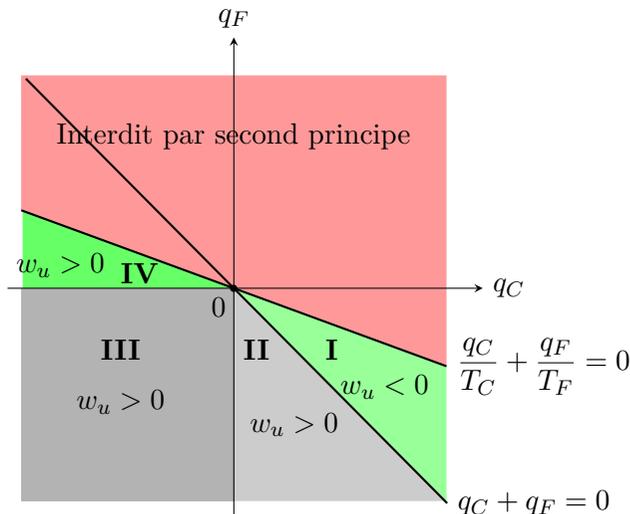


FIGURE 10 – Diagramme de Raveau pour une machine ditherme.

Sur ce diagramme sont portées deux droites :

- La droite d'équation $q_C + q_F = 0$ (càd $q_F = -q_C$, de pente -1).

Le demi-plan au dessus de cette droite correspond à $q_C + q_F > 0$ donc $w_u < 0$. Le demi-plan situé en dessous de cette droite correspond à $q_C + q_F < 0$ d'où $w_u > 0$.

- La droite d'équation $\frac{q_C}{T_C} + \frac{q_F}{T_F} = 0$ (càd $q_F = -\frac{T_F}{T_C} q_C$, dont la pente vérifie $-1 < \text{pente} < 0$).

Seul le demi-plan d'équation $\frac{q_C}{T_C} + \frac{q_F}{T_F} \leq 0$ situé en-dessous de cette droite est autorisé par le second principe!

Les régions permises par le second principe sont numérotées **I, II, III** et **IV**.

Région I :

C'est la *seule* région où $w_u < 0$: la machine est un *moteur ditherme*. Le diagramme montre alors que :

$$w_u < 0 ; \quad q_C > 0 \quad \text{et} \quad q_F < 0$$

ce qui est représenté par le schéma symbolique de fonctionnement de la figure 11.

Région II :

$w_u > 0, q_C > 0$ et $q_F < 0$: on fournit du travail à la machine et celle-ci "pompe" de la chaleur à la source chaude ($q_C > 0$) et en cède à la source froide ($q_F < 0$) : **cela n'a strictement aucun intérêt industriel!!**

Région III :

$w_u > 0, q_C < 0$ et $q_F < 0$: on fournit du travail à la machine et celle-ci cède à la fois de la chaleur à la source chaude ($q_C < 0$) et à la

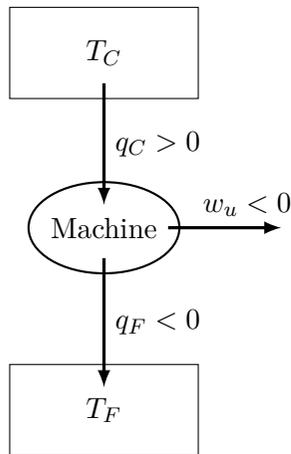


FIGURE 11 – Schéma symbolique de fonctionnement d'un moteur ditherme. La machine fournit un travail ($w_u < 0$) en "pompe" de la chaleur à la source chaude ($q_C > 0$) et en cédant de la chaleur à la source froide ($q_F < 0$).

source froide ($q_F < 0$). Cela pourrait éventuellement être intéressant mais n'est pas utilisé en pratique.

Région IV :

$w_u > 0$, $q_C < 0$ et $q_F > 0$: on fournit du travail à la machine et celle-ci cède de la chaleur à la source chaude ($q_C < 0$) et en "pompe" à la source froide ($q_F > 0$). C'est le principe des *réfrigérateurs et des pompes à chaleur*.

Le schéma symbolique de fonctionnement devient :

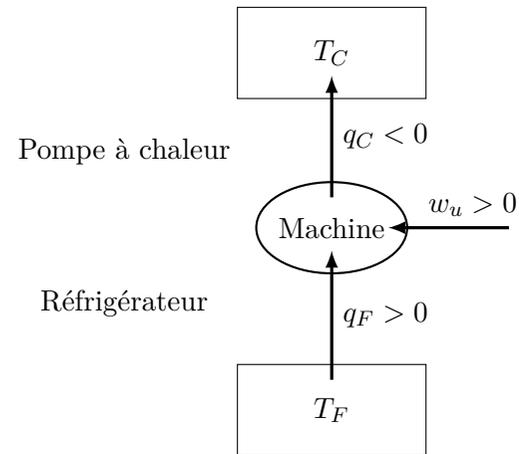


FIGURE 12 – Schéma symbolique de fonctionnement d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur ditherme. On doit fournir un travail à la machine ($w_u > 0$) et, en échange, elle "pompe" de la chaleur à la source froide ($q_F > 0$) et en cède à la source chaude ($q_C < 0$).

c) Rendement d'un moteur ditherme. Premier théorème de Carnot.

Dans ce type de fonctionnement, on a nécessairement :

$$q_C > 0 ; q_F < 0 \text{ et } w_u < 0$$

Le *rendement* du moteur ditherme est alors défini par :

$$r = \frac{|w_u|}{q_C} = -\frac{w_u}{q_C} = 1 + \frac{q_F}{q_C}$$

De :

$$\frac{q_C}{T_C} + \frac{q_F}{T_F} = -s_C \text{ on déduit } q_F = -\frac{T_F}{T_C} q_C - T_F s_C$$

et donc :

$$r = 1 - \frac{T_F}{T_C} - \frac{T_F s_C}{q_c} \leq 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

(On pourrait écrire les mêmes équations avec $W_{u,cycle}$, Q_C et Q_F dans le cas d'une masse m de fluide dans un cylindre). On peut donc énoncer le :

Premier théorème de Carnot

Le rendement d'un moteur ditherme est toujours inférieur au *rendement maximum théorique* $r \leq r^{\max} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$ obtenu lorsque le cycle est décrit de *façon réversible* ($s_C = 0$). Ce rendement maximum théorique ne dépend que des températures de la source chaude (T_C) et de la source froide (T_F) et pas de la nature du fluide qui décrit le cycle.

Exemple : $T_F = 293$ K et $T_C = 500$ K donnent $r^{\max} = 0,41 = 41\%$

d) Efficacités d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur. Second théorème de Carnot.

Dans ce type de fonctionnement on a :

$$w_u > 0 ; q_C < 0 \text{ et } q_F > 0$$

On définit alors les *efficacités* (ou coefficients de performance : COP) :

- Réfrigérateur :

$$e_R = \frac{|q_F|}{|w_u|} = \frac{q_F}{w_u}$$

- Pompe à chaleur :

$$e_P = \frac{|q_C|}{|w_u|} = -\frac{q_C}{w_u}$$

Les équations sont donc :

$$w_u + q_C + q_F = 0 \text{ et } \frac{q_C}{T_C} + \frac{q_F}{T_F} = -s_C$$

(qu'on pourrait aussi écrire avec $W_{u,cycle}$, Q_C et Q_F dans le cas d'une masse m de fluide dans un cylindre). On élimine q_C dans l'inégalité de Clausius :

$$-\frac{q_F + w_u}{T_C} + \frac{q_F}{T_F} = -s_C \iff q_F \frac{T_C - T_F}{T_C T_F} - \frac{w_u}{T_C} = -s_C$$

On divise par $w_u > 0$:

$$e_F \frac{T_C - T_F}{T_C T_F} = \frac{1}{T_C} - \frac{s_C}{w_u}$$

d'où :

$$e_F = \frac{T_F}{T_C - T_F} - \underbrace{\frac{T_C T_F}{T_C - T_F} \frac{s_C}{w_u}}_{>0} \leq \frac{T_F}{T_C - T_F}$$

ce qui permet d'énoncer le second théorème de Carnot :

Deuxième théorème de Carnot (version réfrigérateur)

L'efficacité d'un réfrigérateur ditherme est toujours inférieure à l'efficacité maximale théorique $e_F \leq e_F^{\max} = \frac{T_F}{T_C - T_F}$ obtenue lorsque le cycle est décrit de façon réversible ($s_C = 0$). Cette efficacité maximale théorique ne dépend que des températures de la source chaude (T_C) et de la source froide (T_F) et pas de la nature du fluide qui décrit le cycle.

Le même raisonnement peut être fait avec une pompe à chaleur : il suffit d'éliminer q_F de l'inégalité de Clausius et de refaire le même raisonnement pour aboutir à l'équation :

$$e_P = \frac{T_C}{T_C - T_F} - \underbrace{\frac{T_C T_F}{T_C - T_F} \frac{s_C}{w_u}}_{>0} \leq \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

On a donc le :

Deuxième théorème de Carnot (version pompe à chaleur)

L'efficacité d'une pompe à chaleur ditherme est toujours inférieure à l'efficacité maximale théorique $e_F \leq e_P^{\max} = \frac{T_C}{T_C - T_F}$ obtenue lorsque le cycle est décrit de façon réversible ($s_C = 0$). Cette efficacité maximale théorique ne dépend que des températures de la source chaude (T_C) et de la source froide (T_F) et pas de la nature du fluide qui décrit le cycle.

Exemples : $T_C = 293$ K (20°C) et $T_F = 277$ K (4°C). On obtient : $e_P^{\max} = 18,3$ et $e_F^{\max} = 17,3$.

3) Le cycle de Carnot

On a vu que le rendement d'un moteur ou les efficacités d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur étaient maximales lorsque le cycle ditherme était décrit de façon réversible. Plusieurs questions peuvent alors se poser :

- Existe-t-il au moins un cycle ditherme réversible ?
- En existe-t-il plusieurs ?

La réponse est qu'il n'existe qu'un et un seul cycle ditherme réversible : c'est le **cycle de Carnot**. Il est constitué :

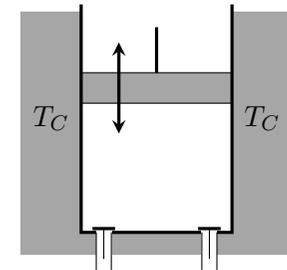
- D'une transformation *isotherme réversible* à la température T_C . Durant cette transformation, le fluide est en contact avec la source chaude et échange de la chaleur avec celle-ci ;
- d'une transformation *isotherme réversible* à la température T_F au cours de laquelle le fluide est en contact avec la source froide et échange de la chaleur avec celle-ci ;
- de deux transformations *adiabatiques réversibles* qui permettent d'amener le fluide de la température T_C à la température T_F , puis de T_F à T_C .

a) Cas d'une masse m de fluide enfermée dans un cylindre limité par un piston

Cela constitue un cas purement théorique qui n'est jamais réalisé en pratique comme on va le comprendre ci-dessous. Une masse m de fluide est enfermée dans un cylindre et un piston, faisant des aller-retour, provoque des compressions et des détentes de ce fluide.

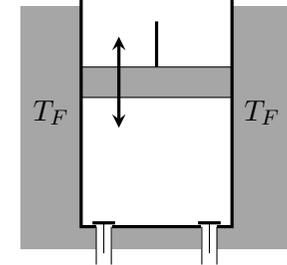
1. Isotherme réversible T_C :

La source chaude de température T_C entoure complètement le cylindre. La détente ou la compression provoquée par le piston doit se faire très lentement (de façon idéale infiniment lentement) et sans aucun frottement, ce qui assure sa réversibilité.



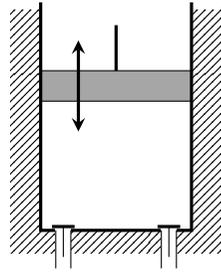
2. Isotherme réversible T_F :

La source chaude est remplacée par la source froide de température T_F . Ici de même, la détente ou la compression doit se faire infiniment lentement et sans aucun frottement pour assurer sa réversibilité.



3. Compressions ou détentes adiabatiques réversibles :

Le cylindre est maintenant entouré d'un isolant thermique (paroi adiabatique) qui empêche tout transfert thermique entre le fluide et le milieu extérieur. La détente ou la compression est encore une fois infiniment lente et sans frottement pour assurer sa réversibilité.



Il est évident que ce cycle est totalement irréaliste en comparaison au processus réel dans un moteur : il s'agit donc d'un **cycle idéal théorique**! Néanmoins ce cycle présente le meilleur rendement en termes de rapport travail / chaleur reçue de la source chaude (mais certainement pas en terme de puissance, c'est à dire de travail récupéré par unité de temps!).

Si S est l'entropie de la masse m de fluide enfermée dans le cylindre, alors le second principe appliqué pour les deux transformations adiabatiques réversibles conduit à :

$$\Delta S = S_E + S_C = 0$$

puisque $S_E = 0$ et $S_C = 0$: il n'y a donc pas de variation d'entropie au cours des deux transformations adiabatiques (transformations isentropiques).

Le cycle de Carnot se prête bien à une représentation dans le **diagramme entropique** : température T en ordonnée et entropie S en abscisse. On obtient un rectangle $ABCD$ qui peut être parcouru soit dans le sens horaire, soit dans le sens trigonométrique (figure 13).

Analyse du diagramme entropique :

On note $W_{u,cycle}$ le travail des forces exercées par le piston sur le fluide au cours d'un cycle complet (il s'agit d'un travail utile, puisque

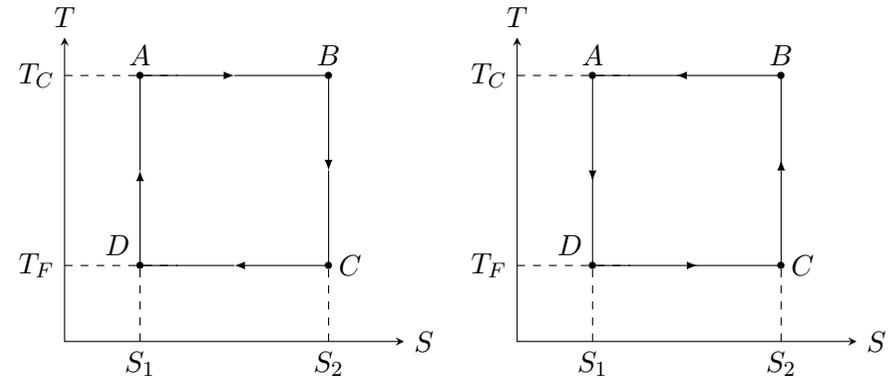


FIGURE 13 – Les deux adiabatiques réversibles sont les parties verticales et les deux isothermes sont les deux parties horizontales du diagramme.

le piston est une pièce mécanique mobile), Q_C la chaleur échangée avec la source chaude et Q_F le chaleur échangée avec la source froide.

Le premier principe appliqué à la masse m de fluide pour un cycle complet donne :

$$\Delta U_{cycle} = 0 = W_{u,cycle} + Q_C + Q_F \quad \text{donc} \quad \boxed{W_{u,cycle} = -(Q_C + Q_F)}$$

- *Parcours dans le sens horaire*

Le second principe conduit à :

$$S_B - S_A = \frac{Q_C}{T_C} \quad \text{donc} \quad Q_C = T_C (S_2 - S_1) > 0$$

$$S_D - S_C = \frac{Q_F}{T_F} \quad \text{donc} \quad Q_F = T_F (S_1 - S_2) < 0$$

Il s'ensuit que $Q_C + Q_F = (T_C - T_F)(S_2 - S_1) > 0$ qui est représentée par l'aire du rectangle. On en déduit que $W_{u,cycle} = -(Q_C + Q_F) < 0$.

Il s'agit donc d'un fonctionnement moteur.

- *Parcours dans le sens trigonométrique*

Le second principe conduit à :

$$S_A - S_B = \frac{Q_C}{T_C} \quad \text{donc} \quad Q_C = T_C (S_1 - S_2) < 0$$

$$S_C - S_B = \frac{Q_F}{T_F} \quad \text{donc} \quad Q_F = T_F (S_2 - S_1) > 0$$

On a alors $Q_C + Q_F = (T_F - T_C)(S_2 - S_1) < 0$ et donc $W_{u,cycle} = -(Q_C + Q_F) > 0$.

Dans ce cas, il s'agit d'un fonctionnement en réfrigérateur ou en pompe à chaleur.

b) Cas d'un fluide en écoulement qui traverse différentes machines

Tout d'abord on ne peut pas utiliser un *détendeur* pour provoquer une détente adiabatique réversible. En effet, un détendeur ne contient aucune pièce mécanique mobile et il est isolé thermiquement (le principe de fonctionnement est celui de la détente de Joule-Thomson à travers une paroi poreuse).

Les bilans enthalpique et entropique entre l'entrée et la sortie conduisent en régime stationnaire (et en négligeant les variations des énergies potentielle et cinétique macroscopiques) :

$$h_2 - h_1 = q + w_u = 0 \quad \text{et} \quad s_2 - s_1 = s_C$$

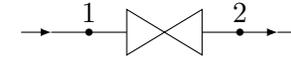


FIGURE 14 – Détendeur adiabatique et sans parties mobiles. À l'entrée, pression et température valent P_1, T_1 et en sortie elles sont P_2, T_2 .

puisque $s_E = 0$.

D'autre part, la seconde identité thermodynamique s'écrit pour une transformation élémentaire $dh = T ds + v dP$. En considérant une transformation t.q. $h = \text{Cste}$, on obtient $0 = T ds + v dP$. Il vient :

$$ds = -\frac{v}{T} dP \implies s_C = s_2 - s_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \frac{v}{T} dP$$

Comme $s_C \geq 0$, il est nécessaire que $P_2 \leq P_1$ et si on veut que $s_C = 0$ pour avoir un fonctionnement réversible, alors la seule possibilité est que $P_2 = P_1$.

On a donc à la fois $h_2 = h_1$ et $P_2 = P_1$ et, si on regarde le diagramme $(h, \ln(P))$ de la figure 15 on constate alors qu'aucune transformation ne peut avoir lieu.

Aucune détente adiabatique réversible ne peut donc être réalisée dans un détendeur (on peut y faire des détentes adiabatiques mais alors elles sont irréversibles!).

Étudions maintenant la machine représentée sur la figure 1 au début de ce document : elle contient un compresseur et une turbine.

- Le compresseur, comme son nom l'indique est une machine qui sert à comprimer le fluide, la plupart du temps de façon adiabatique, grâce à une vis (pièce mobile) montée sur un axe en rotation. En idéalisant la machine on peut imaginer qu'elle fonctionne de façon réversible (ce qui revient à supprimer tout effet

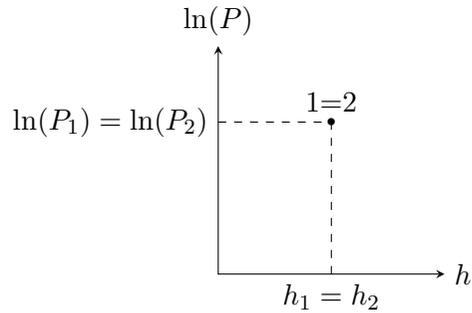


FIGURE 15 –

dissipatif comme les frottements). En reprenant les notations de la figure 1 on obtient :

$$h_2 - h_1 = w_u(\text{Cp}) \quad \text{et} \quad s_2 - s_1 = s_C(\text{Cp}) = 0$$

- La turbine est un appareil de détente qui fonctionne elle aussi de façon adiabatique (le plus souvent). En l'idéalisant on peut faire l'hypothèse de la réversibilité et on obtient :

$$h_3 - h_2 = w_u(\text{Tu}) \quad \text{et} \quad s_3 - s_2 = s_C(\text{Tu}) = 0$$

- Les échanges de chaleur se font exclusivement dans les deux échangeurs thermiques qui sont de simples tuyaux sans parties mobiles et qui permettent un transfert thermique entre le fluide et le milieu extérieur.

Intéressons-nous au cas où le milieu extérieur est une source de température T_0 qui entoure complètement un échangeur thermique et supposons que le fluide s'y écoule de **façon isotherme** :

$$T_e = T_s = T_0$$

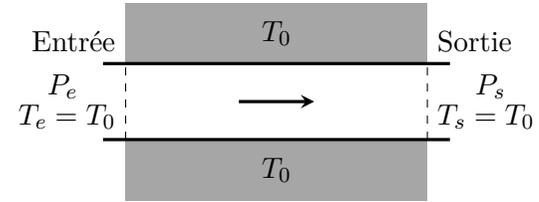


FIGURE 16 – Échangeur thermique entouré d'un source de température T_0 (constante).

Les bilans enthalpique et entropique (par unité de masse) conduisent à :

$$h_s - h_e = q \quad \text{et} \quad s_s - s_e = \frac{q}{T_0} + s_C(\text{Éch})$$

où q est la chaleur échangée par unité de masse de fluide (entrante ou sortante) et la source. Il s'ensuit que l'entropie créée par unité de masse s'écrit :

$$s_C(\text{Éch}) = s_s - s_e - \frac{h_s - h_e}{T_0}$$

Observons ce qui se passe dans un diagramme $(h, \ln(P))$ où on a tracé l'isotherme T_0 .

Plaçons au hasard le points E et S correspondant à l'état du fluide à l'entrée et en sortie sur cette isotherme (figure 17). La seconde identité thermodynamique entre deux points infiniment voisins de cette isotherme allant de E à S s'écrit :

$$dh = T_0 ds + v dP$$

qui s'intègre en :

$$h_s - h_e = T_0 (s_s - s_e) + \int_{P_e}^{P_s} v dP$$

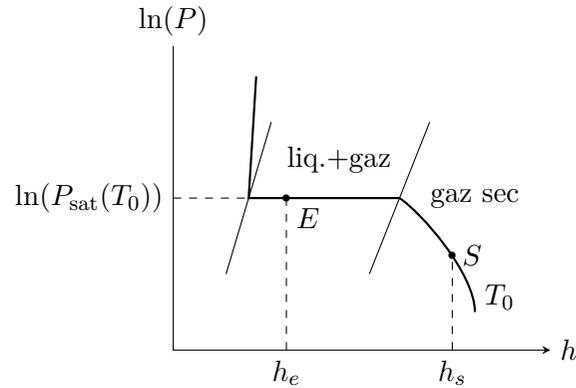


FIGURE 17 – Placement au hasard des points E et S correspondant à l’entrée et à la sortie du fluide dans un échangeur isotherme en contact avec une source de température T_0 .

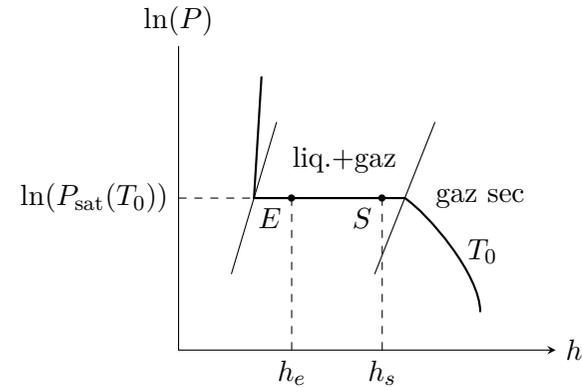


FIGURE 18 – Nécessité d’avoir $P_e = P_s$ pour un fonctionnement réversible. La seule possibilité est d’être dans le domaine de la coexistence liquide - gaz (seul endroit où isotherme = isobare).

d’où :

$$s_C(\text{Éch}) = -\frac{1}{T_0} \int_{P_e}^{P_s} v dP \geq 0$$

Ainsi, on ne peut avoir que $P_s \leq P_e$ et, de plus, le fonctionnement de l’échangeur isotherme ne peut être réversible que si $P_s = P_e$: le fluide dans l’échangeur doit donc s’écouler de façon à la fois isotherme et isobare. Or ceci n’est possible que dans le **domaine de coexistence liquide - gaz**.

Le cycle décrit par 1 kg de fluide en évolution dans la machine de la figure 1 ne peut donc être que de la forme représenté sur la figure 19. Remarquer qu’il s’agit bien d’un cycle de Carnot ... mais dans le domaine liquide - gaz ! On a :

- deux isothermes réversibles au niveau des deux échangeurs thermiques. L’échangeur en contact avec la source chaude T_C

échange une chaleur q_C par unité de masse de fluide. Celui en contact avec la source froide T_F échange une chaleur q_F ;

- deux adiabatiques réversibles.

En sommant les bilans enthalpique et entropique de chaque machine et en posant $w_u = w_u(\text{Cp}) + w_u(\text{Tu})$ (travail utile massique total) on obtient :

$$w_u + q_C + q_F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{q_C}{T_C} + \frac{q_F}{T_F} = 0$$

Il y a deux sens de parcours possibles :

1. Sens horaire

$q_C = h_2 - h_1 > 0$; $q_F = h_4 - h_3 < 0$ d’où $w_u < 0$ (cf. Diag. Raveau)

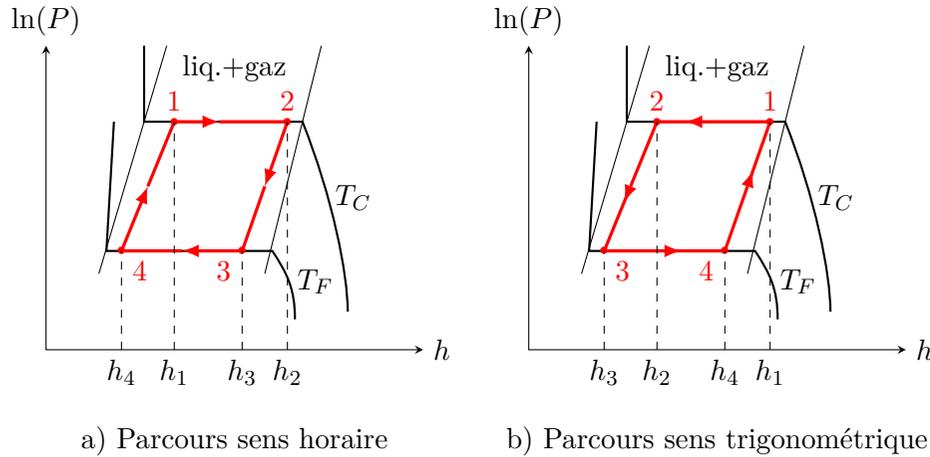


FIGURE 19 – Cycle de Carnot d’une machine avec écoulement stationnaire de fluide, dans le domaine de coexistence liquide - gaz.

La machine est un moteur et son rendement est :

$$r = \frac{|w_u|}{|q_C|} = -\frac{w_u}{q_C} = 1 + \frac{q_F}{q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

On obtient bien le rendement théorique maximal!

1. Sens trigonométrique

$q_C = h_2 - h_1 < 0$; $q_F = h_4 - h_3 > 0$ d’où $w_u > 0$ (cf. Diag. Raveau)

La machine est soit un réfrigérateur, soit une pompe à chaleur. Les efficacités respectives sont alors :

$$e_R = \frac{|q_F|}{|w_u|} = \frac{q_F}{w_u} \quad \text{et} \quad e_P = \frac{|q_C|}{|w_u|}$$

Exercice : montrer qu’on obtient bien :

$$e_R = \frac{T_F}{T_C - T_F} \quad \text{et} \quad e_P = \frac{T_C}{T_C - T_F}$$