

Corrigé du DM n°14

1 De la physique dans le tunnel de Fréjus. Mines - Pont PC 2016

- 1 – La température moyenne est θ_0 . Les températures maximale et minimale sont respectivement $\theta_0 + T_0$ et $\theta_0 - T_0$. On peut proposer un écart de $T_0 = 15^\circ\text{C}$.
- 2 – Le flux thermique élémentaire à travers un élément de surface orienté \vec{dS} est : $d\phi_Q = \vec{j}_Q \cdot \vec{dS}$. Il s'agit de la chaleur qui traverse dS par unité de temps, comptée positivement si \vec{j}_Q et \vec{dS} sont globalement dans le même sens et négativement dans le cas contraire.

$$[j_Q] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

- 3 – La loi de Fourier s'écrit : $\vec{j}_Q = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}} T$. Elle est valable pour des différences de températures pas trop importantes. On aura donc :

$$[\kappa] = \frac{\text{W} \cdot \text{m}^{-2}}{\text{K} \cdot \text{m}^{-1}} = \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

- 4 – On étudie un modèle où $T = T(z, t)$, ce qui implique que :

$$\vec{j}_Q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \hat{e}_z = j_Q(z, t) \hat{e}_z \quad \text{avec} \quad j_Q(z, t) = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z}$$

Entre t et $t + dt$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \delta Q &= \iint_{S(z)} \vec{j}_Q(z, t) \cdot \hat{e}_z \, dS \, dt + \iint_{S(z+dz)} \vec{j}_Q(z, t) \cdot (-\hat{e}_z) \, dS \, dt \\ &= j_Q(z, t) S dt - j_Q(z + dz, t) S dt \\ &= -\frac{\partial j_Q}{\partial z} S \, dz dt \end{aligned}$$

et donc :

$$\delta Q = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} S \, dz dt$$

- 5 – Parce qu'il s'agit d'un volume grand devant l'échelle microscopique et qu'il contient donc un très grand nombre de molécules : la température y garde donc un sens physique (puisque T est une notion macroscopique). Cependant, ce volume est petit à l'échelle macroscopique et on peut donc considérer que la température y est (quasi)-uniforme et vaut $T(z, t)$.
- 6 – Nous avons d'une part :

$$dU = \rho_s S dz c_s (T(z, t + dt) - T(z, t)) = \rho_s S dz c_s \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

et d'autre part, d'après le premier principe de la thermodynamique : $dU = \delta W + \delta Q$. Or $\delta W = 0$ puisqu'on peut assimiler la roche à une phase condensée idéale, donc de volume constant. Il vient donc :

$$\rho_s S dz c_s \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} S \, dz dt \implies \rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial z}$$

et en remplaçant j_Q par son expression, nous obtenons :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho_s c_s} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{D = \frac{\kappa}{\rho_s c_s}}$$

avec

$$\boxed{[D] = \frac{\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}}{\text{kg.m}^{-3} \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}} = \frac{\text{J.s}^{-1}.\text{m}^2}{\text{J}} = \text{m}^2.\text{s}^{-1}}$$

- 7 – Il s'agit d'une solution à onde pseudo-OPPH qui peut se propager avec une atténuation dans le milieu semi infini. On impose à $\underline{T}(z, t)$ de satisfaire l'équation de diffusion thermique :

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial z^2} \implies i\omega T_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} = -D \underline{k}^2 T_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$$

d'où :

$$\underline{k}^2 = -\frac{i\omega}{D} = e^{-i\pi/2} \frac{\omega}{D} \quad \text{d'où} \quad \underline{k} = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\omega}{D}} = \pm (1 - i) \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$$

Comme l'énoncé impose $k' > 0$ (propagation selon les z croissants), nous choisirons :

$$\boxed{\underline{k} = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega}{2D}}}$$

k' est lié à la propagation de l'onde et k'' est lié à son atténuation. On peut ici introduire une épaisseur de peau : $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$. Nous aurons donc :

$$\underline{T}(z, t) = \theta_0 + T_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \implies \boxed{T(z, t) = \theta_0 + T_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)}$$

Cette solution vérifie bien les conditions aux limites en $z = 0$.

- 8 – On doit résoudre :

$$e^{-z_e/\delta} = 0,01 \implies z_e = \delta \ln(100)$$

Pour des oscillations annuelle de température, la période temporelle est $T_e = 365 \text{ j} = 3,15.10^7 \text{ s}$, ce qui conduit à $\omega = \frac{2\pi}{T_e} = 1,99.10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$. Avec les données de l'énoncé, on calcule $D = 1,33.10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, ce qui entraîne $\delta = 1,16 \text{ m}$ et donc : $z_e = 5,32 \text{ m}$.

- 9 – Pour des variations quotidienne de température, la période temporelle devient : $T_e = 24 \text{ h} = 8,64.10^4 \text{ s}$, ce qui conduit à $\omega = 7,27.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, d'où $\delta = 6,05.10^{-2} \text{ m}$ et donc :

$$\boxed{e^{-z_e/\delta} = 6,36.10^{-39}}$$

Ainsi, la température ne varie pas à cette profondeur, à l'échelle d'un jour. On voit que δ diminue lorsque la fréquence augmente : les ondes de température basse fréquence pénètrent plus profondément. On peut dire que le sol se comporte comme un *filtre passe-bas*.

- 10 – Il faut ajouter au bilan précédent, l'énergie dégagée par les éléments radioactifs qui est caractérisée par une puissance volumique \mathcal{P} . Nous aurons donc :

$$dU = \delta Q + \mathcal{P} S dz dt \implies \rho_s S dz c_s \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} S dz dt + \mathcal{P} S dz dt$$

ce qui donne :

$$\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} + \mathcal{P}$$

En régime stationnaire, la température ne dépend pas du temps, et nous avons directement :

$$\boxed{\frac{dj_Q}{dz} = P_0 e^{-\frac{z}{H}}}$$

11 – On peut primitiver l'équation précédente pour trouver :

$$j_Q(z) = -P_0 H e^{-\frac{z}{H}} + A$$

où A est une constante. Les conditions aux limites étant : $j_Q(z = L_c) = -j_m$, on peut déterminer A :

$$A = -j_m + P_0 H e^{-\frac{z}{H}} \quad \text{d'où} \quad j_Q(z) = -\kappa \frac{dT}{dz} = -HP_0 e^{-\frac{z}{H}} + HP_0 e^{-\frac{L_c}{H}} - j_m$$

En prenant la primitive, on obtient l'équation suivante :

$$T(z) = -\frac{H^2 P_0}{\kappa} e^{-\frac{z}{H}} - \frac{HP_0 z}{\kappa} e^{-\frac{L_c}{H}} + \frac{j_m}{\kappa} z + B$$

où B est une nouvelle constante d'intégration. En régime stationnaire on doit supposer que la température en $z = 0$ est constante (sinon c'est incohérent) : on supposera donc que $T(z = 0) = \theta_0$, ce qui correspond à la valeur moyenne. On aura donc :

$$B = \theta_0 + \frac{H^2 P_0}{\kappa}$$

et, finalement :

$$\boxed{T(z) = \theta_0 + \frac{H^2 P_0}{\kappa} \left(1 - e^{-\frac{z}{H}} \right) - \frac{HP_0 z}{\kappa} e^{-\frac{L_c}{H}} + \frac{j_m}{\kappa} z}$$

12 – On a directement :

$$\boxed{j_S = j_Q(z = 0) = HP_0 \left(e^{-\frac{L_c}{H}} - 1 \right) - j_m}$$

13 – On a :

$$\boxed{\frac{j_m}{\kappa} = 1,17 \cdot 10^{-2} \text{ uSI} \quad \text{et} \quad \frac{HP_0}{\kappa} e^{-\frac{L_c}{H}} = 9,26 \cdot 10^{-5} \text{ uSI}}$$

C'est donc le premier terme qui domine et l'expression de la température devient :

$$T(z) = T(z) = \theta_0 + \frac{H^2 P_0}{\kappa} \left(1 - e^{-\frac{z}{H}} \right) + \frac{j_m}{\kappa} z$$

d'où :

$$\boxed{T(z = 1,7 \text{ km}) = 32,8 \text{ °C} \quad \text{et} \quad j_S = -5,97 \cdot 10^{-2} \text{ W.m}^{-2}}$$

$j_S < 0$ indique que le sol émet de la chaleur.

Prise en compte du relief

- 14 – Si on ne prend pas en compte la source d'énergie thermique due à la radioactivité des roches, l'équation de diffusion thermique s'écrit en régime stationnaire (avec le laplacien) :

$$\Delta T = 0 \iff \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

En cherchant une solution par séparation des variables sous la forme : $T(x, z) = f(x)g(z) + T_s$, nous avons déjà que, lorsque $z = 0$:

$$T(x, z = 0) = g(0)f(x) + T_s = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

d'où :

$$f(x) = \frac{T_1}{g(0)} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

Dans la suite, on pose pour simplifier : $k = 2\pi/\lambda$. On a ensuite :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f''(x)g(z) = -\frac{T_1}{g(0)}k^2 \cos(kx)g(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = f(x)g''(z) = \frac{T_1}{g(0)} \cos(kx)g''(z)$$

Nous avons donc, après une petite simplification :

$$\forall x, \cos(kx)(g''(z) - k^2g(z)) = 0 \implies g''(z) - k^2g(z) = 0$$

dont la solution générale est :

$$g(z) = A e^{-kz} + B e^{kz}, \quad A \text{ et } B \text{ cstes}$$

Comme le milieu est infini dans les $z > 0$, il faut prendre $B = 0$, sinon g diverge. Il s'ensuit que $A = g(0)$, $g(z) = g(0)e^{-kz}$ et donc :

$$T(x, z) = T_s + T_1 e^{-kz} \cos(kx)$$

- 15 – En présence de sources thermiques, l'équation de diffusion en régime stationnaire s'écrit :

$$\kappa \Delta T(x, z) + \mathcal{P} = 0 \implies \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{P_0}{\kappa} e^{-\frac{z}{H}}$$

Soit $T_p(x, z)$ une *solution particulière* de cette équation. Posons $T(x, z) = T_p(x, z) + T_h(x, z)$. En réinjectant dans l'équation de diffusion, nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial^2 T_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_p}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_h}{\partial z^2}\right) = -\frac{P_0}{\kappa} e^{-\frac{z}{H}}$$

mais comme $T_p(x, z)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 T_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_p}{\partial z^2} = -\frac{P_0}{\kappa} e^{-\frac{z}{H}}$$

nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_h}{\partial z^2} = 0$$

Ainsi, $T_h(x, z)$ est la solution *générale* de l'équation homogène.

Pour trouver une solution particulière, nous pouvons nous inspirer de la question **12**. Cherchons cette solution sous la forme $T_p(z)$ (indépendante de x), telle que $\lim_{z \rightarrow +\infty} T_p(z) = 0$ et $T_p(0) = 0$. Nous aurons :

$$T_p''(z) = -\frac{P_0}{\kappa} e^{-\frac{z}{H}} \implies T_p(z) = -\frac{H^2 P_0}{\kappa} e^{-\frac{z}{H}} + Az + B$$

où A et B sont deux constantes. L'absence de divergence entraîne $A = 0$ et la nullité en $z = 0$ entraîne :

$$B = \frac{H^2 P_0}{\kappa} \quad \text{et donc} \quad T_p(z) = \frac{H^2 P_0}{\kappa} \left(1 - e^{-\frac{z}{H}} \right)$$

Nous avons maintenant $T(x, z) = T_h(x, z) + T_p(z)$ avec la condition aux limites en $z = 0$: $T(x, z = 0) = T_s + T_1 \cos(kx)$ d'où il résulte que, comme $T_p(z)$ s'annule en $z = 0$, $T_h(x, z = 0) = T_s + T_1 \cos(kx)$. Ainsi $T_h(x, z)$ vérifie exactement la même équation et les mêmes conditions aux limites que la solution déterminée dans la question **14**, on en déduit que :

$$T_h(x, z) = T_s + T_1 e^{-kz} \cos(kz)$$

d'où :

$$T(x, z) = T_s + T_1 e^{-kz} \cos(kz) + \frac{H^2 P_0}{\kappa} \left(1 - e^{-\frac{z}{H}} \right)$$

2 Échangeur thermique (CCINP MP 2015)

II. 4. Bilan d'enthalpie

- II. 4.a. $d_k h_k$ est l'enthalpie entrante par unité de temps à l'entrée k .
 $d'_k h'_k$ est l'enthalpie sortante par unité de temps à la sortie k' .

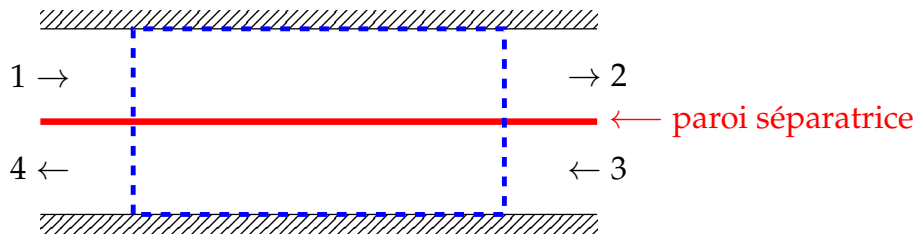


FIGURE 5 – Échangeur

- II. 4.b. Le système étudié (délimité par les pointillés bleus sur la figure 5) est un système ouvert (eau glycolée et eau sanitaire en écoulement stationnaire). Le milieu extérieur à ce système ne fournit ni puissance mécanique (pas de partie mobile) ni puissance thermique (canalisations calorifugées).

On en déduit

$$(d_4 h_4 + d_2 h_2) - (d_1 h_1 + d_3 h_3) = 0$$

Les écoulements sont stationnaires donc $d_1 = d_2 = d_g$ et $d_3 = d_4 = d_e$.

De plus, $h_2 - h_1 = c_g (T_2 - T_1)$ et $h_4 - h_3 = c_e (T_4 - T_3)$.

On en déduit

$$d_e c_e (T_4 - T_3) + d_g c_g (T_2 - T_1) = 0$$

- II. 4.c.

$$d_e = 13,1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

II. 5. Bilan d'entropie

- II. 5.a. En régime stationnaire d'écoulements,

$$\sum_{k' \in \text{sortie}} d_{k'} s_{k'} - \sum_{k \in \text{entrée}} d_k s_k = \frac{\delta S_{\text{ech}}}{dt} + \frac{\delta S_{\text{cr}}}{dt}$$

où $d_k s_k$ est l'entropie entrante par unité de temps à l'entrée k et $d'_k s'_k$ est l'entropie sortante par unité de temps à la sortie k' .

$\frac{\delta S_{\text{ech}}}{dt}$ est l'entropie reçue par le système ouvert par unité de temps lors des échanges thermiques et $\frac{\delta S_{\text{cr}}}{dt}$ est l'entropie créée par unité de temps pour le même système.

- II. 5.b. En prenant le même système qu'en II.4.b., $\frac{\delta S_{\text{ech}}}{dt} = 0$ (aucun transfert thermique).

$$d_e(s_4 - s_3) + d_g(s_2 - s_1) = 0 + \frac{\delta S_{\text{cr}}}{dt}$$

Sachant que $s_4 - s_3 = c_e \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right)$ et $s_2 - s_1 = c_g \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$, il vient

$$\frac{\delta S_{\text{cr}}}{dt} = d_e c_e \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) + d_g c_g \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

AN : $\frac{\delta S_{\text{cr}}}{dt} = 2,81 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ On trouve bien une entropie créée positive qui traduit l'irréversibilité des transferts thermiques entre les deux fluides, l'un étant plus chaud que l'autre.

Partie II.C. Isolation thermique d'une canalisation d'eau

- II. 6. $P_{\text{th}} = \iint \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = h(T_i - T_0) 2\pi r_i L$ est la puissance fournie par la canalisation au fluide extérieur.
- II. 7. La puissance fournie (et non « échangée ») par l'isolant au fluide extérieur par conducto-convection est

$$P_{\text{th, isolant}} = h(T_e - T_0) 2\pi r_e L$$

- II. 8. II. 8.a. En appliquant le premier principe à la couche cylindrique de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + dr$:

$$\frac{\partial(\delta U)}{\partial t} = P_{\text{cond}}(r) - P_{\text{cond}}(r + dr)$$

En régime stationnaire, $\frac{\partial(\delta U)}{\partial t} = 0$; on en déduit que P_{cond} est indépendante de r .

II. 8.b. Par continuité de la puissance thermique, la puissance thermique conductive en r_e^- (c'est-à-dire P_{cond}) est égale à la puissance thermique conducto-convective en r_e^+ (c'est-à-dire $P_{\text{th, isolant}}$) :

$$P_{\text{cond}} = P_{\text{th, isolant}}$$

II. 8.c. Loi de Fourier : $\vec{j}_{\text{cond}}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$ puisqu'ici $\vec{\text{grad}}T = \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$.

On en déduit

$$P_{\text{cond}} = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L$$

II. 8.d.

$$P_{\text{cond}} = P_{\text{th, isolant}} \Rightarrow -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L = h (T_e - T_0) 2\pi r_e L$$

donc

$$\frac{dT}{dr} = \frac{hr_e}{\lambda r} (T_0 - T_e)$$

II. 8.e. Par intégration entre $r = r_i$ ($T = T_i$) et r ($T = T(r)$) :

$$T(r) = T_i + \frac{hr_e}{\lambda} (T_0 - T_e) \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)$$

$$\text{II. 8.f. } T_e = T(r_e) = T_i + \frac{hr_e}{\lambda} (T_0 - T_e) \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

Posons $K = \frac{hr_e}{\lambda} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$ ainsi $T_e = T_i + K(T_0 - T_e)$. On en déduit

$$T_e = \frac{T_i + KT_0}{1 + K} = T_0 + \frac{T_i - T_0}{1 + K}$$

$$\text{II. 9. } \frac{P_{\text{th}}}{P_{\text{th, isolant}}} = \frac{T_i - T_0}{T_e - T_0} \frac{r_i}{r_e}.$$

$$\text{or } \frac{T_i - T_0}{T_e - T_0} = 1 + K.$$

$$\text{On en déduit } \frac{P_{\text{th}}}{P_{\text{th, isolant}}} = (1 + K) \frac{r_i}{r_e}.$$

En posant $x = r_e/r_i$ et $\alpha = hr_i/\lambda$, il vient alors

$$\frac{P_{\text{th}}}{P_{\text{th, isolant}}} = \frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$$

II. 10. L'isolant présente un intérêt si $\frac{P_{\text{th}}}{P_{\text{th, isolant}}} > 1$ pour $r_e > r_i$ (ou $x > 1$).

II. 10.a. La figure 11 de l'énoncé montre que pour $x > 1$, $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$ est une fonction croissante de x à partir de la valeur $x = 1$. On a donc toujours $P_{\text{th,isolant}} < P_{\text{th}}$ quelle que soit l'épaisseur d'isolant. Le polyuréthane isole quelle que soit son épaisseur.

II. 10.b. la figure 12 montre un comportement différent. Pour $x \in [1;60]$, $\frac{P_{\text{th}}}{P_{\text{th,isolant}}} \leq 1$ donc ajouter du plâtre augmente la puissance cédée par l'eau à l'air ambiant : l'eau se refroidit alors plus vite qu'en l'absence de plâtre.

C'est seulement pour $x > 60$, soit $r_e > 60r_i$ que $P_{\text{th,isolant}} < P_{\text{th}}$. Il faut donc une valeur minimale de r_e égale à $r_{e,\text{min}} = 120 \text{ cm}$! Peu réaliste !

C'est la résistance conducto-convective qui diminue avec r_e qui est responsable de ce cas de figure.

II. 10.c. Soit $f(x) = \frac{1}{x} + \alpha \ln x$.

$$f'(x) = \frac{\alpha x - 1}{x^2}$$

$$f'(x_m) = 0 \Leftrightarrow x_m = \frac{1}{\alpha}$$

II. 10.d. La figure 12 montre que $x_m \approx 4$. On en déduit $\frac{hr_i}{\lambda_2} = \frac{1}{4}$ donc

$$\lambda_2 = 4hr_i = 0,24 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$