

## 1 De la physique dans le tunnel de Fréjus (Mines)

À l'exception de  $i$  tel que  $i^2 = -1$ , les nombres complexes sont soulignés. La notation  $\bar{z}$  désigne le nombre complexe conjugué de  $z$ . Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple  $\vec{j}$  pour un flux surfacique; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple  $\hat{e}_z$  tel que  $\|\hat{e}_z\| = 1$ . Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs.

### I. — Température dans le tunnel de Fréjus

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

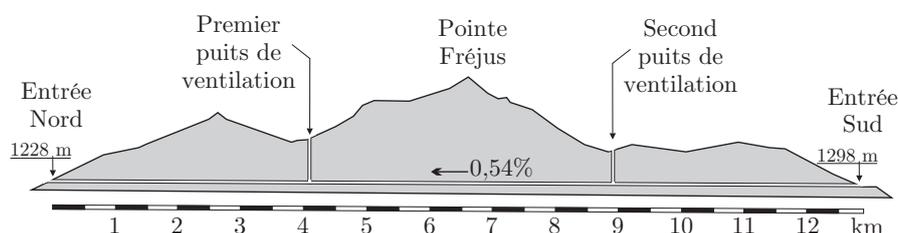


FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ  $30^\circ\text{C}$ . Dans un premier temps nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

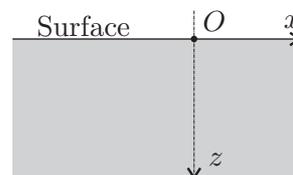


FIGURE 2 – Sol

#### I.A. — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique  $\kappa$ , de masse volumique  $\rho_s$  et de capacité thermique massique  $c_s$ . Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure  $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$  avec  $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$ . (Voir figure 2).

- 1 — Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en  $z = 0$ . Calculer la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour  $T_0$  pour les évolutions annuelles de température.
- 2 — Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire  $dS$  pendant  $dt$ , est noté  $d\phi_Q$ . Rappeler la définition du vecteur  $\vec{j}_Q$ , densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?
- 3 — Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique  $\kappa$ .
- 4 — On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre  $z$  et  $z + dz$  de surface  $S$ . Quelle est l'énergie thermique  $\delta Q$  reçue par cette tranche entre  $t$  et  $t + dt$  ?

□ 5 — Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

□ 6 — Établir l'expression de sa variation d'énergie interne  $dU$  en fonction de  $\frac{\partial j_Q}{\partial z}$  et  $\mathcal{S}$  puis en fonction de  $\rho_s$ ,  $c_s$ ,  $\mathcal{S}$  et  $\frac{\partial T}{\partial t}$ .

□ 7 — En déduire l'équation de la chaleur à une dimension  $\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$  dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient  $D$  de diffusion thermique.

On cherche des solutions de la forme  $\underline{T}(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$  vérifiant la condition aux limites  $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$ .

□ 8 — Interpréter cette forme de solution. Déterminer la relation de dispersion correspondante. En déduire l'expression de  $\underline{k}$  qu'on mettra sous la forme  $\underline{k} = k' + ik''$  avec  $k' > 0$ . Quelle est la signification physique de  $k'$  et  $k''$ . Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle  $T(z,t)$ .

□ 9 — Calculer la profondeur  $z_e$  à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de  $\theta_0$  de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne  $\rho_s = 2,65 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $c_s = 8,50 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $\kappa = 3,00 \text{ SI}$ .

□ 10 — Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur  $z_e$  ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

## I.B. — Température d'origine géophysique

La température moyenne de 30° C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est  $L_c = 45,0 \text{ km}$ . Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.

Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{z}{H}}$  avec  $H = 10,0 \text{ km}$ . On prendra  $\mathcal{P}_0 = 2,50 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ . La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface  $\mathcal{I}_{c/m}$  entre la croûte et le manteau ce dernier génère un flux surfacique constant  $\vec{j}_m = -j_m \hat{e}_z$  avec  $j_m = 35,0 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$ .

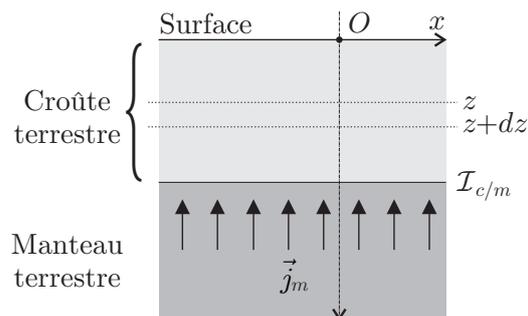


FIGURE 3 – Modèle géophysique

□ 11 — Effectuer, en régime stationnaire, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface  $\mathcal{S}$ , comprise entre  $z$  et  $z + dz$ .

□ 12 — En déduire la température  $T(z)$  en fonction de :  $H$ ,  $L_c$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $j_m$ ,  $\kappa$  et  $\theta_0 = 0^\circ \text{ C}$  la température moyenne de surface en  $z = 0$ .

□ 13 — Exprimer le flux thermique total  $\vec{j}_S = j_S \hat{e}_z$  au niveau de la surface en  $z = 0$ .

□ 14 — Comparer les deux termes proportionnels à  $z$  et simplifier l'expression de  $T(z)$ . Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ( $z = 1,70 \text{ km}$ ) puis  $j_S$ .

**I.C. — Prise en compte du relief**

On suppose maintenant que la température à la surface plane  $z = 0$  possède une dépendance spatiale en  $x$  que l'on modélise par la relation  $T(x, z = 0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ . Pour étudier l'effet du relief sur la température dans le tunnel de Fréjus on prendra  $\lambda = 10,0$  km.

□ **15** — On suppose pour cette question qu'il n'y a pas de source d'énergie thermique dans la roche. Donner sans démonstration l'équation différentielle satisfaite par  $T(x, z)$  en régime stationnaire. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer la solution  $T(x, z)$  qui respecte la condition aux limites  $T(x, z = 0)$  et qui demeure finie lorsque  $z \rightarrow +\infty$ . Justifier la prise en compte des effets de la variation spatiale de la température.

Indication : la méthode de séparation des variables consiste à chercher une solution du problème sous la forme  $T(x, z) = f(x)g(z) + T_s$ .

□ **16** — Toujours pour une surface plane d'équation  $z = 0$ , en utilisant la linéarité de l'équation satisfaite par la température, déterminer  $T(x, z)$  en considérant les sources internes d'énergie thermique.

## 2 Échangeur thermique

### Partie II.B. Echangeur thermique

L'échangeur thermique est un organe fréquemment utilisé dans les installations thermiques. On le trouve dans des pompes à chaleur, des machines à froid ou certains cumulus d'eau chaude.

Le principe d'un échangeur thermique est de permettre le transfert d'énergie thermique entre deux fluides. Dans l'étude menée ici, ce sont :

- l'eau glycolée circulant dans le cumulus d'eau chaude d'une part ;
- l'eau à usage domestique d'une habitation d'autre part.

Ces deux liquides, supposés indilatables et incompressibles, sont mis en contact thermique au sein de l'échangeur via des canalisations dans lesquelles ils se déplacent en sens opposé. C'est dans la zone active de l'échangeur, représentée sur les figures 7 et 8 ci-dessous, que s'opère le transfert thermique entre les deux fluides. Hormis sur leur surface commune, les canalisations sont calorifugées.

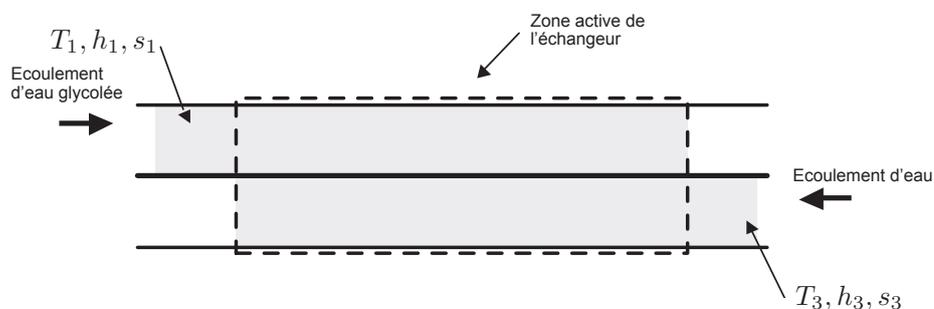


FIGURE 7 – Echangeur à l'instant initial.



FIGURE 8 – Echangeur à l'instant final.

On note  $d_e$  et  $d_g$  respectivement le débit massique d'eau et d'eau glycolée. On note également  $T_i$ ,  $h_i$ ,  $s_i$  respectivement : la température, l'enthalpie massique, l'entropie massique du fluide désigné par  $i \in \{1; 2; 3; 4\}$ , sachant que :

- $i = 1$  fait référence à l'entrée d'eau glycolée dans la zone active.
- $i = 2$  fait référence à la sortie d'eau glycolée de la zone active.
- $i = 3$  fait référence à l'entrée d'eau dans la zone active.
- $i = 4$  fait référence à la sortie d'eau de la zone active.

Les écoulements sont supposés horizontaux et en régime stationnaire. On néglige la variation d'énergie cinétique des fluides lors de leur passage dans l'échangeur.

#### II.4. Bilan d'enthalpie

On donne l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en écoulement permanent :

$$\sum_{k' \in \text{Sorties}} d_{k'} h_{k'} - \sum_{k \in \text{Entrées}} d_k h_k = p_u + p_{th} , \quad (4)$$

où  $p_u$  désigne la puissance massique échangée entre le système et les parois mobiles qui le délimitent et  $p_{th}$  est la puissance massique échangée entre le système et l'extérieur par transfert thermique.

**II.4.a.** Donner la signification physique des termes du membre de gauche de l'égalité (4).

**II.4.b.** On note  $c_e$  et  $c_g$  respectivement la capacité thermique massique de l'eau et de l'eau glycolée. Déterminer la relation entre :  $c_g$ ,  $c_e$ ,  $d_g$ ,  $d_e$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$ . Il est attendu de définir très clairement le système d'étude.

**II.4.c.** On donne :  $c_g = 3,29 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $c_e = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $d_g = 10,0 \text{ kg.s}^{-1}$ ,  $T_1 = 10,0 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 15,0 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_3 = 15,0 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $T_4 = 12,0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Calculer numériquement le débit massique d'eau  $d_e$ .

**II.5.** Bilan d'entropie

**II.5.a.** Ecrire une relation analogue à (4) traduisant le second principe de la thermodynamique pour un système ouvert en écoulement permanent et donner la signification physique de chacun des termes intervenant dans cette relation.

**II.5.b.** Déterminer l'expression du taux de création d'entropie par unité de temps dans l'échangeur. Effectuer l'application numérique et indiquer l'origine physique de l'irréversibilité le cas échéant.

Donnée : l'entropie d'un corps indilatable et incompressible, de capacité thermique massique  $c$  et de température  $T$ , est donnée, à une constante additive près, par :  $s(T) = c \ln T + cte$ .

## Partie II.C. Isolation thermique d'une canalisation d'eau

Après avoir transité dans l'échangeur thermique, l'eau alimente le réseau d'une habitation. Afin de limiter les pertes thermiques dans les canalisations, on se propose, dans cette partie, d'étudier quelques solutions d'isolation thermique.

La canalisation est cylindrique, d'axe  $Oz$ , de rayon  $r_i$  et de longueur  $L \gg r_i$ . L'eau y circulant est à la température  $T_i$ . L'objectif de cette partie est de comparer les pertes latérales de la canalisation sans ou avec un isolant.

On adopte le modèle suivant :

- seule la conduction thermique radiale, c'est-à-dire dans une direction perpendiculaire à l'axe  $Oz$ , est prise en compte. On néglige donc la conduction selon l'axe  $Oz$  ;
- la température de l'eau dans la canalisation est supposée uniforme. La conduction radiale s'opère donc pour  $r \geq r_i$  uniquement ;
- l'étude est menée en régime stationnaire ;
- on néglige l'épaisseur de la paroi de la canalisation.

Sans isolant (figure 9, page 14), la canalisation est en contact avec l'air intérieur de l'habitation, de température  $T_0$ .

**II.6.** La densité surfacique de puissance thermique échangée par transfert conducto-convectif au niveau de la surface latérale de la canalisation est donnée par  $\vec{j}_Q = h(T_i - T_0) \vec{u}_r$  (loi de Newton), où  $h$  est une constante dimensionnée appelée coefficient d'échange et  $\vec{u}_r$  le vecteur unitaire radial de la base cylindrique. Exprimer la puissance thermique  $P_{th}$  transférée au niveau de la surface latérale du système.

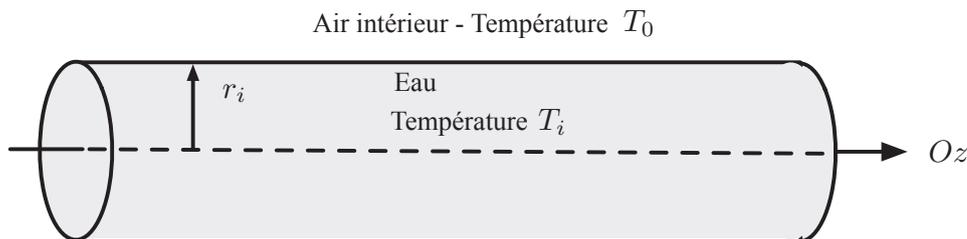


FIGURE 9 – Canalisation sans isolant.

On applique désormais un isolant thermique sur la canalisation précédente. L'isolant possède un rayon intérieur  $r_i$  et un rayon extérieur  $r_e$  (voir figure 10). En un point situé à une distance  $r$  de l'axe  $Oz$  et situé à l'intérieur de l'isolant, c'est-à-dire pour  $r_i \leq r \leq r_e$  en repérage cylindrique, la température est notée  $T(r)$ . On note  $T_e = T(r_e)$  et  $T_i = T(r_i)$ .

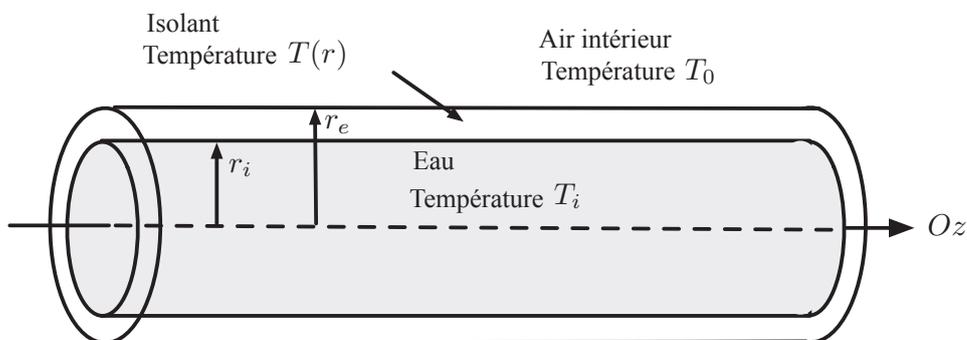


FIGURE 10 – Canalisation avec isolant.

Dans la suite, l'échange conducto-convectif au niveau de la surface intérieure de l'isolant n'est pas pris en compte.

La température de part et d'autre de la surface intérieure de l'isolant est continue :

$$T(r_i^-) = T(r_i^+) = T_i.$$

**II.7.** On suppose que le coefficient d'échange en  $r = r_e$  est  $h$ . Exprimer la puissance thermique  $P_{th,isolant}$  échangée au niveau de la surface latérale extérieure de l'isolant par conduction-convexion en fonction de  $h$ ,  $T_0$ ,  $T_e$ ,  $L$  et  $r_e$ .

**II.8.** On note  $P_{cond}(r)$  la puissance thermique associée au phénomène de conduction thermique dans l'isolant, traversant un cylindre de longueur  $L$  et de rayon  $r$  tel que  $r_i \leq r \leq r_e$ . Nous allons établir et exploiter le lien entre  $P_{th,isolant}$  et  $P_{cond}(r)$ .

**II.8.a.** En effectuant un bilan d'énergie interne sur un cylindre de longueur  $L$ , de rayons interne  $r$  et externe  $r + dr$  tels que  $r_i \leq r < r + dr \leq r_e$  (avec  $dr \ll r$ ), montrer qu'en régime stationnaire  $P_{cond}(r)$  est indépendante de  $r$ , soit :  $\frac{dP_{cond}(r)}{dr} = 0$ .

**II.8.b.** En déduire que :  $P_{cond}(r) = P_{th,isolant}$ .

**II.8.c.** Rappeler l'expression de la loi de Fourier relative à la conduction thermique en exprimant le vecteur densité surfacique de flux de conduction thermique  $\vec{j}_{cond}(r) = j_{cond}(r) \vec{u}_r$  en fonction notamment de la conductivité thermique de l'isolant,  $\lambda$ , supposée uniforme. Exprimer ensuite la puissance thermique associée,  $P_{cond}(r)$ .

Donnée : en repérage cylindrique :  $\vec{\text{grad}}(f(r)) = \frac{df(r)}{dr} \vec{u}_r$ .

**II.8.d.** Dédire des questions précédentes que :  $\frac{dT}{dr} = \frac{hr_e}{\lambda r} (T_0 - T_e)$ .

**II.8.e.** En déduire l'expression de  $T(r)$ .

**II.8.f.** En déduire que :  $T_e = T_0 + \frac{T_i - T_0}{1 + \frac{hr_e}{\lambda} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}$ .

**II.9.** Montrer que :  $\frac{P_{th}}{P_{th,isolant}} = \frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$ , avec  $x = \frac{r_e}{r_i}$  et  $\alpha$  à exprimer en fonction de  $h$ ,  $r_i$  et  $\lambda$ .

On envisage deux solutions d'isolation différentes. On donne pour chacune d'elles :  $h = 3,0 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  et  $r_i = 2,0 \text{ cm}$ .

— Solution d'isolation n° 1 : l'isolant est du polyuréthane, de conductivité thermique :  $\lambda_1 = 0,025 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

Le graphe de  $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$  en fonction de  $x$  est représenté sur la figure 11 ci-dessous pour la valeur de  $\alpha$  correspondante.

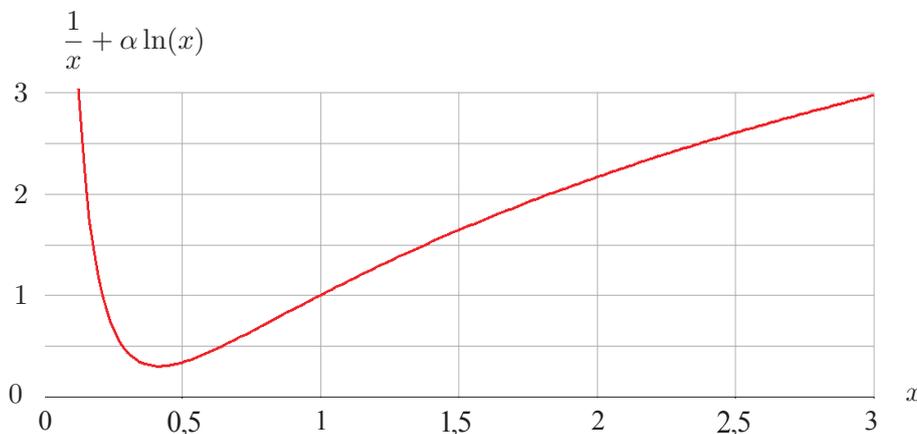


FIGURE 11 – Graphe de la fonction  $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$  fonction de  $x$  pour la valeur de  $\alpha$  du polyuréthane.

— Solution d'isolation n° 2 : l'isolant est du plâtre, de conductivité thermique  $\lambda_2$ .

Le graphe de  $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$  en fonction de  $x$  est représenté sur la figure 12 (page 16) pour la valeur de  $\alpha$  correspondante. L'encart représente un agrandissement pour  $0 \leq x \leq 8$ .

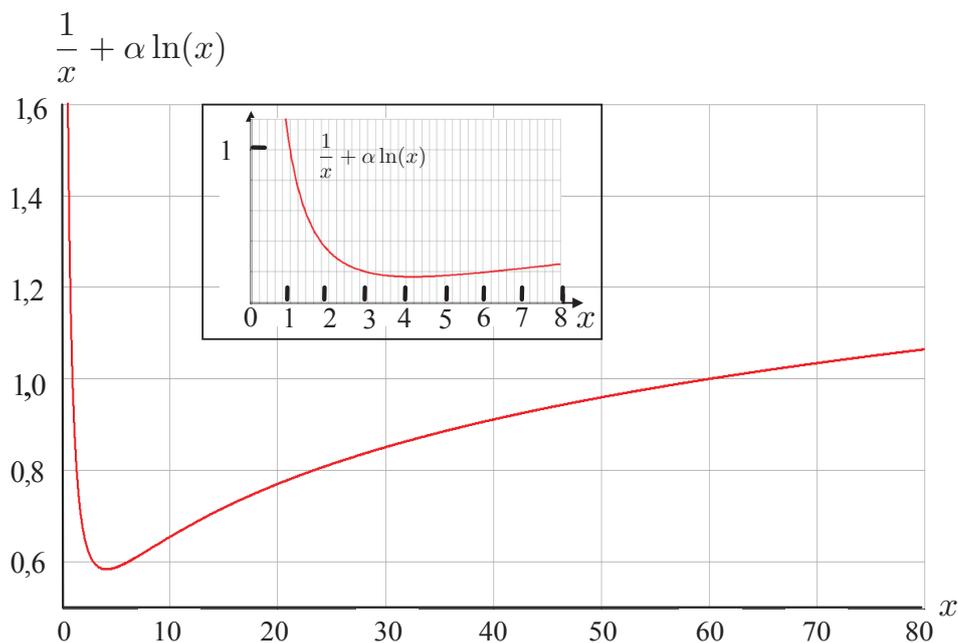


FIGURE 12 – Graphe de la fonction  $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$  fonction de  $x$  pour la valeur de  $\alpha$  du plâtre.

**II.10.** En vous appuyant sur les graphes des figures 11 et 12, répondre de façon argumentée aux questions suivantes :

**II.10.a.** Est-il toujours efficace d'isoler avec du polyuréthane ?

**II.10.b.** Est-il toujours efficace d'isoler avec du plâtre ? Le cas échéant, déterminer à partir de quelle valeur de  $r_e$  l'isolation au plâtre devient efficace et commenter.

**II.10.c.** Pour quelle valeur  $x_m$  de  $x$  la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$  admet-elle un minimum ?

**II.10.d.** En déduire la valeur numérique de la conductivité thermique du plâtre  $\lambda_2$ .

**Fin de l'énoncé**