Corrigé exercice 7 : Cycle de Joule

7 Cycle de Joule

Une masse m = 1,0 kg d'un gaz parfait diatomique de coefficient γ = 1,40 constant et de masse molaire M = 29 g.mol^{-1} décrit un cycle moteur théorique réversible constitué :

- *d'une compression adiabatique $A_1 \to A_2$. En A_1, P_1 = 1,0 bar et T_1 = 293 K. La pression en A_2 est P_2 = 8,0 bar ;*
- *d'une détente isobare $A_2 \to A_3$ au cours de laquelle il échange une chaleur Q_{23} avec le milieu extérieur ;*
- *d'une détente adiabatique $A_3 \to A_4$;*
- *d'une compression isobare $A_4 \to A_1$ qui le ramène à son état initial.*

1. *Exprimer les capacités thermiques C_p et C_v associées à la masse m, en fonction de m, M, R et γ.*

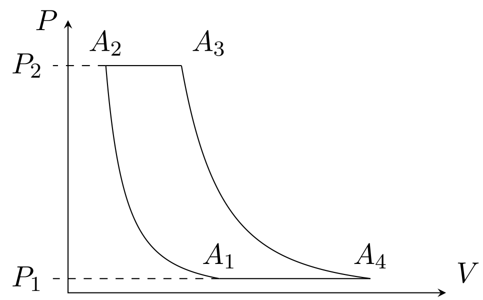
Loi de Mayer pour n moles de gaz parfait, avec $n = m/M$. On a donc :

$$C_p - C_v = nR = \frac{mR}{M}$$

On utilise ensuite la définition $\gamma = C_p/C_v$ et on obtient :

$$\boxed{C_v = \frac{mR}{M\,(\gamma-1)} \quad \text{et} \quad C_p = \gamma\, C_v = \frac{mR\gamma}{M\,(\gamma-1)}}$$

2. *Tracer qualitativement l'allure de ce cycle dans le diagramme de Clapeyron. Ce cycle est-il ditherme ? Déterminer sans aucun calcul le point du cycle qui possède la température la plus grande.*



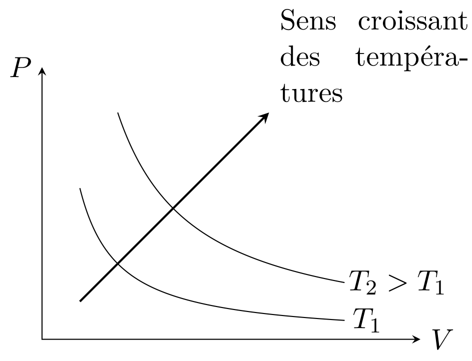
Les deux adiabatiques réversibles A_1A_2 et A_3A_4 sont décrites par la loi de Laplace (gaz parfait + transformation adiabatique et réversible).

$$\boxed{PV^\gamma = \text{Cste} \quad \text{d'où} \quad P = \frac{\text{Cste}}{V^\gamma}}$$

Tout comme dans l'exercice 8, ce cycle **ne peut pas être ditherme**. Le problème vient ici des deux isobares réversibles.

- La détente isobare réversible (qui est plutôt un chauffage isobare puisque la pression ne varie pas et que le volume augmente) ne peut se faire de façon réversible, donc quasistatique, qu'en amenant le gaz au contact d'un très grand nombre de thermostats de températures étagées entre T_2 et T_3.
- C'est la même chose pour le refroidissement isobare $A_4 \longrightarrow A_1$.

Pour un gaz parfait, les isothermes s'écrivent $P = nRT/V$ et sont des hyperboles. Elles se représentent comme ci-dessous :



On remarque donc que la température la plus haute du cycle est celle de A_3.

3. *Définir le rendement théorique r de ce moteur et montrer que : $r = 1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$ Application numérique : calculer r.*

Le rendement d'un moteur est par définition :

Travail du cycle

$$r = \frac{|W_{\text{cycle}}|}{Q_{\text{reçue}}}$$

Chaleur reçue

Ici la chaleur est reçue au niveau du chauffage isobare A_2A_3. Comme dans l'exercice 8, il vaut mieux exprimer W_{cycle} en fonction des chaleurs car elles sont plus faciles à calculer.

<u>1^{er} principe pour tout le cycle</u> :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = W_{\text{cycle}} + Q_{23} + Q_{41} = 0 \implies W_{\text{cycle}} = -\,Q_{23} - Q_{41}$$

donc :

$$r = \frac{-\,W_{\text{cycle}}}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$$

Or, pour une isobare (résultat très utile) :

$$\boxed{Q_{23} = H_3 - H_2 = C_p\,(T_3 - T_2) \quad \text{et} \quad Q_{41} = H_1 - H_4 = C_p\,(T_1 - T_4)}$$

d'où :

$$r = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$$

On utilise ensuite la loi de Laplace pour les adiabatiques réversibles $A_1 \to A_2$ et $A_3 \to A_4$, sous la forme $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{Cste}$:

$$T_1^\gamma P_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma P_2^{1-\gamma} \iff T_1 = T_2\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$$

et de même :

$$T_4^\gamma P_1^{1-\gamma} = T_3^\gamma P_2^{1-\gamma} \iff T_4 = T_3\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$$

On élimine ensuite T_1 et T_4 dans l'expression du rendement et on aboutit au résultat demandé :

$$\boxed{r = 1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}}$$

A.N. : $r = 0{,}45 < 1$, ce qui est normal pour un moteur.