

PRINCIPES D'OPTIQUE PHYSIQUE

Table des matières

I. Propriétés géométriques de la lumière	2
1) Loi de propagation rectiligne de la lumière	2
2) Rayon lumineux	2
3) Source ponctuelle	2
4) Indice optique d'un milieu THI	3
5) Principe du retour inverse	5
II. La vibration lumineuse (ou le signal lumineux)	5
1) Modèle scalaire de la lumière	5
2) Principe de superposition	6
3) Origine physique du signal lumineux	6
4) Chemin optique	7
5) Surface d'onde et théorème de Malus	8
6) Propagation du signal lumineux	9
III. Cohérence temporelle de la lumière	10
1) Intensité lumineuse émise par une source ponctuelle S	10
2) Quelques notions de théorie du signal	11
3) Temps de cohérence et longueur de cohérence	13
4) Intensité lumineuse en un point M	15
IV. Propriétés fréquentielles de la lumière	15
1) Notion de transformée de Fourier d'un signal	15
a) Définition	15
b) Propriétés	16
c) Transformée de Fourier inverse	17
d) Quelques exemples	17
2) Composante monochromatique d'un signal lumineux .	17
3) Densité spectrale d'intensité	18

4) Les différents types de densités spectrales	19
a) Raie quasimonochromatique	19
b) Spectre de raies	19
c) Lumière à spectre continu	19

I. Propriétés géométriques de la lumière

1) Loi de propagation rectiligne de la lumière

dans le cadre du programme on s'intéresse à la propagation de la lumière dans des milieux matériels transparents (T), homogènes (H) et isotropes (I).

T
H .

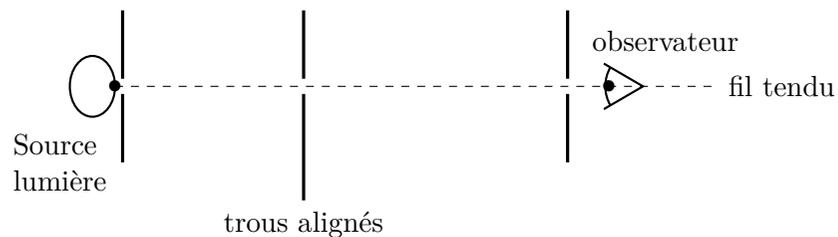
I .

Exemples : verre, air, eau, vide sont des milieux THI.

Loi expérimentale : propagation rectiligne

Dans un milieu THI, la lumière se propage en ligne droite.

Exemple d'expérience :



2) Rayon lumineux

Définition. Rayon lumineux

On appelle *rayon lumineux* (RL) reliant deux points A et B le chemin suivi par la lumière pour aller de A à B .

La loi de propagation rectiligne indique que, dans un milieu THI, le rayon lumineux reliant A et B est le segment $[A, B]$.



3) Source ponctuelle

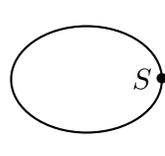
La lumière est émise par les atomes qui restituent l'énergie acquise au cours de chocs sous forme d'énergie lumineuse (émission d'onde électromagnétique). Une source de lumière contient toujours un très grand nombre d'atomes.

On modélise géométriquement la lumière émise par une source étendue comme un ensemble de demi-droites issues de chaque point de la surface Σ de la source.

Chaque point S de Σ est une *source ponctuelle*. Chaque source ponctuelle est un point d'émission d'un faisceau de lumière constituée d'un ensemble de rayons lumineux dont le point origine est S (on parle de *faisceau isogène* = même origine).

Pratique :

Pour isoler une source ponctuelle, on utilise un *diaphragme circulaire* (c'est à dire un trou circulaire percé dans un écran opaque)



4) Indice optique d'un milieu THI

Dans un milieu THI la lumière se propage à la vitesse v identique en chaque point du milieu (homogénéité) et indépendante de la direction (isotropie). L'expérience montre que $v \leq c$. On définit alors *l'indice optique du milieu* par :

$$n = \frac{c}{v} \geq 1$$

Exemples :

Verres : $n \approx 1,5$; eau : $n \approx 1,33$; air : $n = 1,00$; vide : $n = 1$

L'indice optique est aussi appelé *indice de réfraction* car il intervient dans les lois de Snell-Descartes

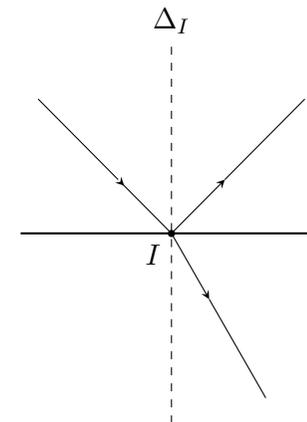
Lois de Snell-Descartes

Soit un rayon lumineux arrivant sur une surface Σ séparant deux milieux THI caractérisés par des indices optiques n_1 et n_2 . Lorsque Σ est parfaitement lisse (c'est à dire qu'elle a subi un polissage poussé) on parle de **dioptré** et les lois de Snell-Descartes sont vérifiées.

I est le *point d'incidence*. Le plan formé par le rayon incident et la normale Δ_I au dioptré passant par I est appelé *plan d'incidence*.

1^{ère} loi Le rayon incident se divise en I en un *rayon réfléchi* et un *rayon réfracté* qui appartiennent tous les deux au plan d'incidence.

On oriente alors le plan d'incidence (en général dans le sens trigonométrique) en définissant un sens positif pour la mesure des angles. Les inclinaisons des rayons lumineux sont repérés par leurs angles orientés par rapport à la normale Δ_I .



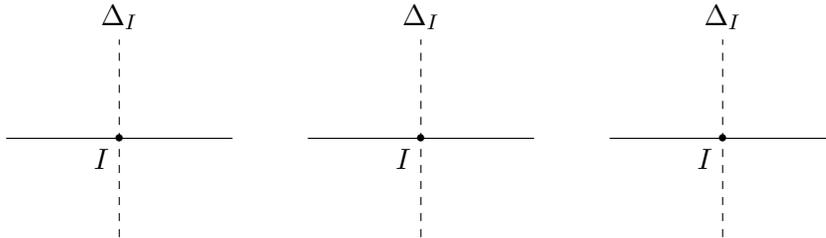
2^{ème} loi Loi de la réflexion : $i'_1 = -i_1$

3^{ème} loi Loi de la réfraction. En cas d'existence, le rayon réfracté vérifie :

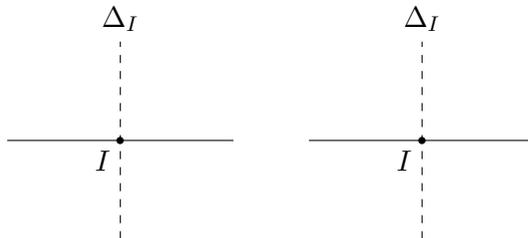
$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

Remarques :

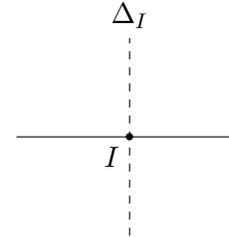
- Par définition le rayon incident existe toujours et on a $i_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De même, le rayon réfléchi existe toujours et $i'_1 = -i_1$.
- En cas d'existence la loi de la réfraction indique que i_2 est de même signe que i_1 :



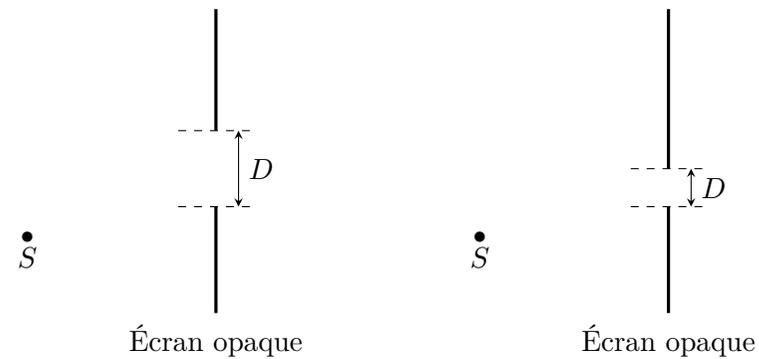
- En cas d'existence on a $\sin(i_2) = \frac{n_1}{n_2} \sin(i_1)$. On en déduit que :



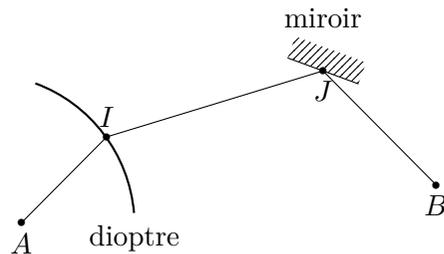
- Si la surface Σ qui sépare les deux milieux THI n'est pas suffisamment lisse on observe un phénomène de *diffusion de la lumière* aussi bien en réflexion qu'en transmission.



- Il peut aussi apparaître un phénomène de *diffraction* dans le cas où le faisceau lumineux traverse une ouverture dont la taille est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ de la lumière.



5) Principe du retour inverse

**Principe du retour inverse**

Dans le cas où il n'y a que des réflexions et/ou des réfractions (pas de diffusion ni de diffraction), le trajet suivi par la lumière pour aller de A en B est identique à celui qu'elle suivrait pour aller de B en A si on inversait le sens de propagation de la lumière.

Ce principe résulte de la symétrie des lois de Snell-Descartes.

II. La vibration lumineuse (ou le signal lumineux)1) **Modèle scalaire de la lumière**

La lumière fait partie des ondes électromagnétiques :

- Propagation d'un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) .
- Onde transverse électrique et magnétique : $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ sont orthogonaux à la direction de propagation de l'onde, c'est à dire au rayon lumineux passant par M .

Il semble donc naturel d'étudier les phénomènes lumineux en tenant compte du caractère vectoriel de cette onde.

Cependant une telle procédure implique des calculs longs et difficiles qui, en dehors de quelques situations particulières, ne sont menés à terme que numériquement à l'aide de calculateurs très puissants.

Toutefois il est possible de rendre compte d'une grande variété d'expériences en se limitant à une modélisation simplifiée de la lumière appelée *modèle scalaire*. Dans le cadre de cette modélisation, on considère que l'onde lumineuse est correctement décrite par un champ scalaire $a(M, t)$ appelée *vibration lumineuse* ou *signal lumineux* existant au point M et à l'instant t .

- Ce modèle (qui peut apparaître comme une grosse simplification) a une origine historique : les premières tentatives d'explication des phénomènes optiques furent établies en développant des analogies avec les ondes sonores qui étaient déjà connues. Dans une onde sonore, la grandeur qui vibre est la pression P qui est un scalaire. Il était alors facile de transposer directement les résultats acquis pour les ondes sonores au ondes lumineuses.

- Durant près d'un siècle (1690 - 1810), toutes les expériences réalisées en optique, notamment les interférences et la diffraction étaient parfaitement expliquées par ce modèle scalaire. Ce n'est que vers 1820 qu'on réalisa les premières expériences qui ne pouvaient être expliquées par ce modèle.
- Depuis le XX^{ème} siècle la théorie électromagnétique de la lumière a connu de nombreux développements : les calculs effectués montrent que, dans toutes les situations où le modèle scalaire apporte une explication alternative à la théorie électromagnétique, cette explication apparaît comme une simplification très acceptable mais qui résulte de certaines approximations, dont les conditions de validité ne peuvent être abordées ici.

C'est pourquoi le modèle scalaire des ondes lumineuses porte aussi le nom *d'approximation scalaire*.

2) Principe de superposition

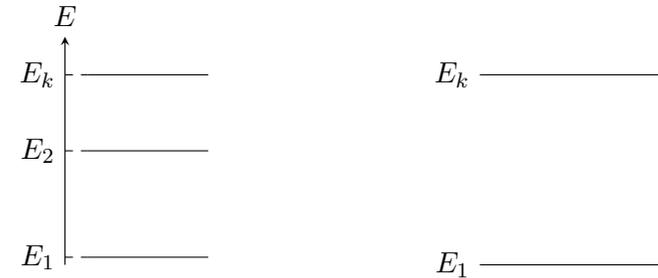
Dans le cas où plusieurs faisceaux lumineux se superposent dans une région de l'espace, les vibrations lumineuses *sont additives* : la vibration lumineuse résultante au point M et à l'instant t est la somme des vibrations dues à chacun des faisceaux :

$$a(M, t) = \sum_i a_i(M, t)$$

C'est le *principe de superposition*.

3) Origine physique du signal lumineux

La lumière est émise par les atomes dont on sait que l'énergie est quantifiée.



Cependant, les niveaux excités ne sont pas stables et l'atome finit par retomber dans son état fondamental.

- En description quantique : l'atome émet un photon d'énergie $E_{\text{ph}} = E_k - E_1$. À cette énergie est associée une fréquence ν_0 donnée par la loi de Planck-Einstein :

$$h\nu_0 = E_k - E_1$$

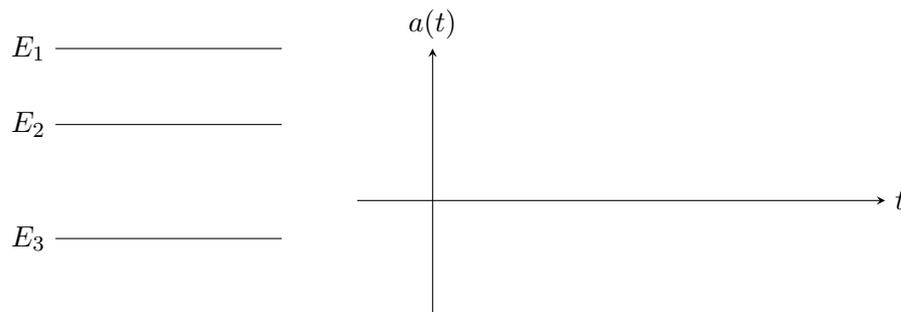
- En description ondulatoire l'atome émet un train d'onde de durée τ et de pulsation $\omega_0 = 2\pi\nu_0$.



L'atome peut être excité à nouveau s'il subit d'autres chocs : le processus peut donc recommencer.



De plus, l'excitation de l'atome ne se fait pas toujours vers le même niveau d'énergie E_k :



Enfin, une source de lumière contient de l'ordre de 10^{23} atomes qui émettent de façon indépendante les uns des autres et de façon totalement aléatoire, en fonction des chocs qu'ils subissent.

Conclusion :

Le signal lumineux émis par une source ponctuelle S est très complexe et de nature fondamentalement aléatoire. La cadre théorique adapté pour le décrire est celui de la théorie des signaux aléatoires qui fait des $a(S, t)$ une variable aléatoire à chaque instant t .

Au niveau d'un cours de CPGE on se contente de raisonner avec deux modèles.

a) Modèle du signal monochromatique.

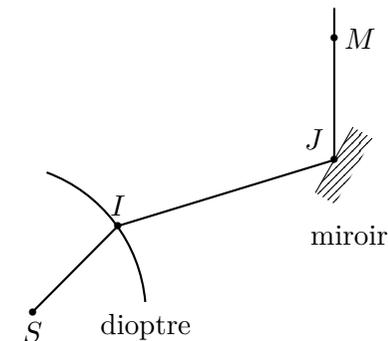
C'est un modèle très simpliste mais on en verra la justification plus loin.

b) Modèle du signal stationnaire d'ordre 2

On le décrira plus loin.

4) Chemin optique

Considérons un rayon lumineux issu d'une source ponctuelle S et soit M un point sur ce rayon lumineux.



Du fait des réfractions et réflexions, ce rayon lumineux est une ligne brisée qui représente le trajet suivi par la lumière pour aller de S à M . Soit τ_{SM} le temps de propagation de S à M . On a :

Définition. Chemin optique

On appelle *chemin optique* entre S et M et on note (SM) la grandeur : $(SM) = n_1 SI + n_2 IJ + n_2 JM$, et, de façon plus générale :

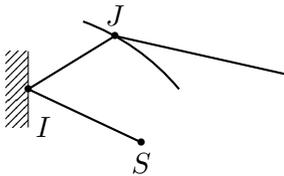
$$(SM) = \sum_k n_k d_k$$

où la somme porte sur les différents morceaux de ligne droite du rayon lumineux et où d_k est la distance parcourue en ligne droite dans le milieu THI d'indice n_k .

On a donc la propriété :

$$\tau_{SM} = \frac{(SM)}{c} \iff (SM) = c \tau_{SM}$$

On peut aussi définir le chemin optique entre deux points A et B situés sur le même rayon lumineux issu d'une source ponctuelle S .



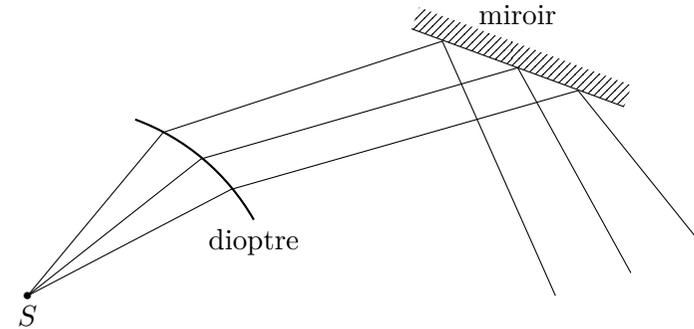
5) Surface d'onde et théorème de Malus

Considérons un faisceau lumineux (ensemble de rayons lumineux) isogène c'est à dire issu d'une même source ponctuelle S et qui n'a subi que des réflexions et/ou des réfractions. Il n'y a donc aucune diffusion ni diffraction. Le trajet des rayons lumineux est donc entièrement déterminé par les lois de Snell-Descartes.

Définition. Surface d'onde

On appelle *surface d'onde* (SO) une surface dont tous les points sont à égal chemin optique de S :

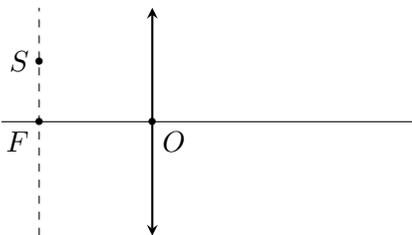
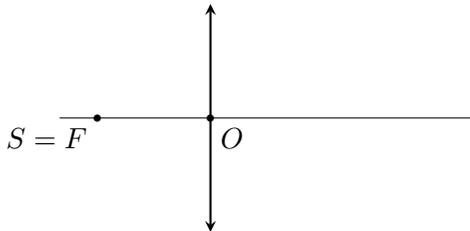
$$\forall (M_a, M_b) \in SO \times SO, (SM_a) = (SM_b)$$



Théorème de Malus (admis)

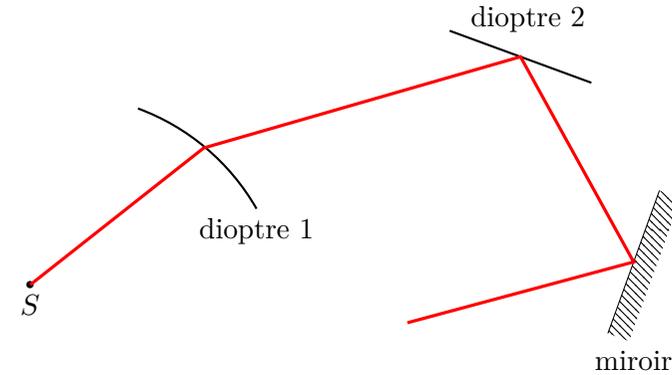
Les rayons lumineux issus d'une même source ponctuelle S et n'ayant subi que des réflexions et/ou des réfractions (pas de diffusion ni de diffraction) coupent les surfaces d'ondes avec un angle droit.

Exemples classiques



6) Propagation du signal lumineux

Considérons une source ponctuelle et notons $a(S, t) \stackrel{\text{noté}}{=} a(t)$ le signal lumineux émis par S à l'instant t . Soit M un point situé sur un rayon lumineux issu de S . Par hypothèse, ce rayon lumineux n'a subi que des réflexions et/ou des réfractions.



- À chaque réfraction sur un dioptré (par ex. dioptré 1), le signal est multiplié par le *coefficient de transmission du dioptré* :

$$t_d = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} > 0$$

- À chaque réflexion sur un dioptré (par ex. dioptré 2), le signal est multiplié par le *coefficient de réflexion du dioptré* :

$$r_d = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}$$

Ici on peut avoir $r_d > 0$ si $n_2 > n_3$ ou bien $r_d < 0$ si $n_2 < n_3$.

- À chaque réflexion sur un miroir, le signal est multiplié par le *coefficient de réflexion du miroir* :

$$r_m = -1 \quad (\text{cf. métal parfait})$$

Le signal lumineux au point M et à l'instant t est alors donné par :

De façon générale on a :

III. Cohérence temporelle de la lumière

1) Intensité lumineuse émise par une source ponctuelle S

En électromagnétisme les capteurs (œil, photodiode, photorésistance, etc...) sont sensibles à la valeur moyenne du carré de la norme du champ électrique. Chaque capteur est caractérisé par une durée de détection T_d et cette valeur moyenne, appelée *intensité du signal*, est définie par :

$$I(t) = \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle_{T_d}(t) = \frac{1}{T_d} \int_{t-T_d}^t \|\vec{E}\|^2(u) du$$

Ordres de grandeur :

Capteur	œil	photorésistance	photodiode
T_d (s)	$2 \cdot 10^{-2}$	10^{-2}	10^{-6}

Dans le cadre de l'approximation scalaire de l'optique, le signal lumineux émis par une source ponctuelle S s'écrit $a(S, t)$ et on le note plus simplement $a(t)$ (en l'absence d'ambiguïté sur le point S qui émet ce signal). On **définit** l'*intensité lumineuse émise par S* à l'instant t par :

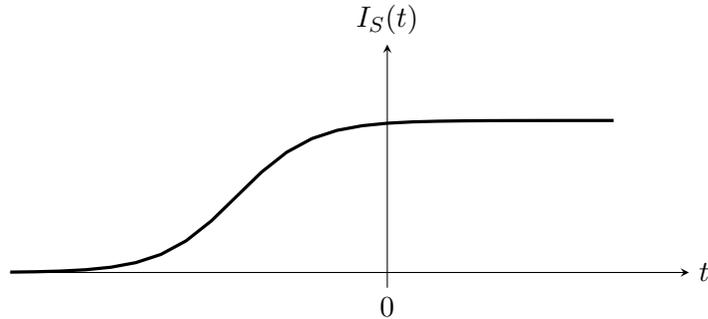
$$I_S(t) = \langle a^2 \rangle_{T_d}(t) = \frac{1}{T_d} \int_{t-T_d}^t a^2(u) du$$

Définition. Signal stationnaire en intensité

On dit que le signal lumineux émis par une source ponctuelle S est *stationnaire en intensité* si et seulement si I_S ne dépend pas du temps. Autrement dit, pour tous instants t_1 et t_2 , on a :

$$I_S(t_1) = I_S(t_2)$$

En pratique, les sources de lumière utilisées au laboratoire peuvent être considérées comme étant stationnaires en intensité à condition d'attendre la fin du régime transitoire après l'allumage de la source.



Conséquence : pour tout $t \in J_{\text{stat}}$ on a :

Exemple du modèle monochromatique

On suppose que $a(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Représentation complexe associée à un signal monochromatique :

Au signal monochromatique $a(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ on associe la grandeur complexe :

$$\underline{a}(t) = A_m e^{i\varphi_0} e^{i\omega_0 t} \quad \text{telle que} \quad a(t) = \text{Re}[\underline{a}(t)]$$

L'intensité lumineuse en S est alors donnée simplement par :

$$I_S = \frac{A_m^2}{2} = \frac{|\underline{a}(t)|^2}{2} = \frac{\underline{a}(t) \underline{a}^*(t)}{2}$$

2) Quelques notions de théorie du signal

Soit $a(t)$ un signal (c'est à dire une grandeur physique qui dépend du temps t : lumière, son, etc...). On suppose que les capteurs sensibles à $a(t)$ délivrent une réponse de la forme :

$$I(t) = \langle a^2 \rangle_{T_d}(t) = \frac{1}{T_d} \int_{t-T_d}^t a^2(u) du$$

avec une durée de détection T_d .

On définit le signal temporellement décalé :

$$a_\tau : t \mapsto a_\tau(t) = a(t - \tau)$$

et on introduit la moyenne temporelle :

$$\langle a_{\tau_1} a_{\tau_2} \rangle_{T_d}(t) = \frac{1}{T_d} \int_{t-T_d}^t a_{\tau_1}(u) a_{\tau_2}(u) du$$

Définition. Signal stationnaire d'ordre 2

On dit que le signal $a(t)$ est stationnaire d'ordre 2 si et seulement si, pour tout τ_1 et τ_2 , $\langle a_{\tau_1} a_{\tau_2} \rangle_{T_d}$ est indépendant de t .

Remarque :

Un signal stationnaire d'ordre 2 est automatiquement stationnaire en intensité. Il suffit de prendre $\tau_1 = \tau_2 = 0$.

Exemple :

Signal sinusoïdal (monochromatique dans le cas de la lumière) : $a(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ avec l'hypothèse $\omega_0 T_d \gg 1$.

Théorème du décalage temporel

Soit $a(t)$ un signal stationnaire d'ordre 2. Alors, pour tout τ_1 et τ_2 on a :

$$\langle a_{\tau_1} a_{\tau_2} \rangle_{T_d} = \langle a_{\tau_2 - \tau_1} \rangle_{T_d} = \langle a_{\tau_1 - \tau_2} \rangle_{T_d}$$

Démonstration :

La stationnarité d'ordre 2 justifie la définition suivante :

Définition. Fonction d'autocorrélation

Soit $a(t)$ un signal stationnaire d'ordre 2. On appelle *fonction d'auto-corrélation* de a la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g : \tau \mapsto g(\tau) = \langle a a_{\tau} \rangle_{T_d} = \frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} a(u) a(u - \tau) dt$$

Propriétés de g :

1. $g(0) = \langle a^2 \rangle_{T_d} = I$

On peut définir la fonction *d'auto-corrélation normalisée* g_n :

$$\tau \mapsto g_n(\tau) = \frac{g(\tau)}{I}. \text{ On a donc } g_n(0) = 1.$$

2. g est une fonction paire de τ .

Exemple du signal sinusoïdal avec $\omega_0 T_d \gg 1$.

Cas particulier de la lumière

Les expériences montrent que la lumière peut être considérée comme un signal stationnaire du second ordre à partir du moment où on est dans l'intervalle de stationnarité J_{stat} .

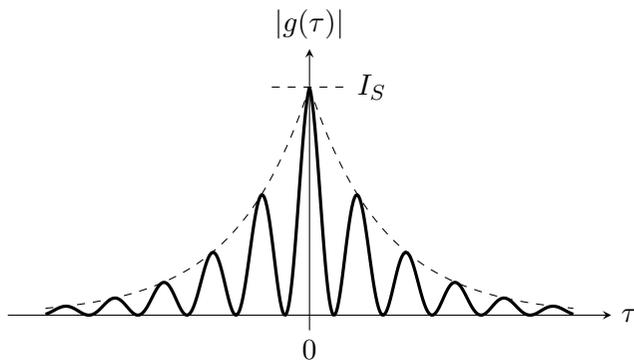
De plus, la lumière est un signal de valeur moyenne nulle :

$$\forall t, \langle a \rangle_{T_d}(t) = 0$$

3) Temps de cohérence et longueur de cohérence

Revenons à un signal lumineux $a(t)$ émis par une source ponctuelle S , supposé stationnaire d'ordre 2. Dans le cas d'un signal réaliste (c'est à dire pas une sinusoïde!), l'expérience montre que :

$$g(\tau) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } \tau \longrightarrow \pm\infty$$



Définition. Temps de cohérence et longueur de cohérence

On appelle *temps de cohérence* τ_c du signal lumineux émis par S un temps caractéristique de décroissance de $|g(\tau)|$. Au bout de quelques τ_c (environ $5\tau_c$ en pratique) on peut considérer que $g(\tau) \approx 0$.

On appelle *longueur de cohérence* du signal lumineux émis par S la longueur $\ell_c = c\tau_c$ où c est la célérité de la lumière dans le vide.

Quelques ordres de grandeur :

- Laser He - Ne : $\tau_c = 10^{-9}$ s et $\ell_c = 0,3$ m = 30 cm ;
- Raie verte du mercure : $\tau_c = 10^{-12}$ s et $\ell_c = 3.10^{-4}$ m = 0,3 mm ;
- Lumière blanche : $\tau_c = 10^{-15}$ s et $\ell_c = 3.10^{-7}$ m = 300 nm

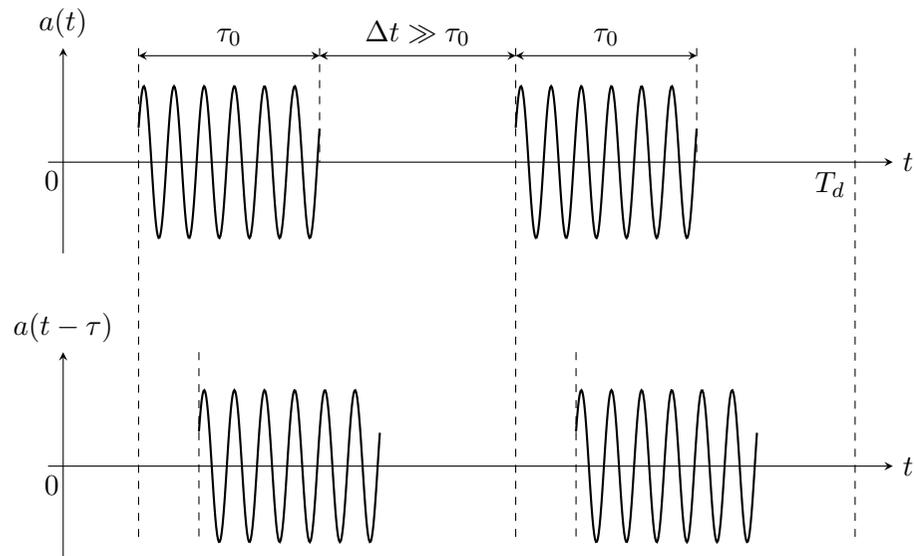
Exemple fondamental : le modèle des trains d'onde (le schéma ne respecte pas les échelles)

Modèle :

- Sur l'intervalle de temps $[0, T_d]$ il y a N trains d'ondes numérotés de 1 à N . En pratique on a $N \gg 1$.
- Pour le train d'onde numéro n , $1 \leq n \leq N$, on a :

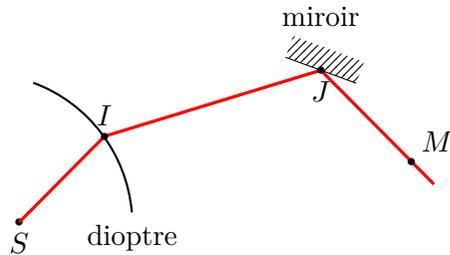
$$a(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_n) \text{ si } t \in [t_{ni}, t_{nf}] \text{ avec } t_{nf} - t_{ni} = \tau_0$$

- On suppose que $\omega_0 T_d \gg 1$ et $\omega_0 \tau_0 \gg 1$.



4) Intensité lumineuse en un point M

Considérons une source ponctuelle S et un point M situé sur un rayon lumineux issu de S .



Le signal lumineux émis par S est : $a(S, t) \stackrel{\text{noté}}{=} a(t)$, stationnaire d'ordre 2.

Le signal reçu au point M à l'instant t est donc :

$$a(M, t) = \kappa a(t - \tau) = \kappa a_\tau(t) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{(SM)}{c}$$

τ étant le temps de propagation pour aller de S à M .

Par définition, les intensités lumineuses en S et en M sont données par :

$$I_S = \langle a^2 \rangle_{T_d} \quad \text{et} \quad I_M = \langle a^2(M, t) \rangle_{T_d} = \kappa^2 \langle a_\tau^2 \rangle_{T_d}$$

Quelle est la relation entre I_M et I_S ?

IV. Propriétés fréquentielles de la lumière

1) Notion de transformée de Fourier d'un signal

Il s'agit d'un outil fondamental en physique et en théorie du signal. Il permet d'introduire rigoureusement les fréquences associées à un signal quelconque et justifie l'importance accordée aux signaux sinusoïdaux.

a) Définition

Théorème 1

Soit f une application de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$ de carré sommable, c'est à dire telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty \quad (\text{c'est à dire } \in \mathbb{R}_+)$$

Alors pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ existe, ce qui permet de définir le nombre complexe :

$$\tilde{f}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Comme \tilde{f}_ω existe pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on peut poser la définition suivante :

Définition. Transformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une application de carré sommable. On appelle *transformée de Fourier* de f l'application notée $\text{TF}[f] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, définie par :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \text{TF}[f](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Remarques :

- Un théorème de mathématiques sur les intégrales impropres indique que, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ existe alors cela assure l'existence des deux intégrales impropres :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} [f(t) e^{-i\omega t}] dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} [f(t) e^{-i\omega t}] dt$$

En particulier, si f est à valeurs dans \mathbb{R} , c'est à dire si $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \in \mathbb{R}$, cela assure l'existence des deux intégrales impropres :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

- Inversement, si les deux intégrales impropres :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

existent, alors cela assure l'existence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ et les égalités ci-dessous sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned}$$

Le point de vue du physicien :

La variable t représente le temps et on parle de *transformée de Fourier temporelle*. La variable ω est alors une pulsation (en rad.s^{-1}) et on peut introduire une fréquence associée $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ en Hz.

b) Propriétés

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de carré sommable. On a alors les propriétés suivantes :

1. D'après les propriétés des intégrales impropres :

$$\boxed{\operatorname{TF}[f + g] = \operatorname{TF}[f] + \operatorname{TF}[g] \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{TF}[\lambda f] = \lambda \operatorname{TF}[f]}$$

2. Si f est paire (resp. impaire) alors $\operatorname{TF}[f]$ est paire (resp. impaire)

3. Si f est à valeurs réelles, c'est à dire si $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \in \mathbb{R}$, alors :

$$\boxed{\forall \omega \in \mathbb{R}, \operatorname{TF}[f](-\omega) = (\operatorname{TF}[f](\omega))^*}$$

c) Transformée de Fourier inverse

Théorème 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une application de carré sommable. Alors la transformée de Fourier $\text{TF}[f]$ est elle aussi de carré sommable, c'est à dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{TF}[f]|^2(\omega) d\omega \text{ existe } (\in \mathbb{R}_+)$$

Notons provisoirement \tilde{f} la transformée de Fourier de f . On peut appliquer le théorème 1 qui indique que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ existe ($\in \mathbb{R}_+$) pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ceci qui permet de définir l'application :

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Définition. Transformée de Fourier inverse.

L'application ψ est appelée *transformée de Fourier inverse* de \tilde{f} et on la note $\text{TF}^{-1}[\tilde{f}]$. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \text{TF}^{-1}[\tilde{f}](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

On a alors le :

Théorème 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une application de carré sommable. Alors on a $\psi = f$. Autrement dit $\text{TF}^{-1}[\text{TF}[f]] = f$. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{TF}[f](\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Ainsi, la connaissance de la transformée de Fourier $\text{TF}[f]$ permet de reconstruire l'application f .

Remarque :

Si f et g sont deux applications de carré sommable, alors :

$$f = g \iff \text{TF}[f] = \text{TF}[g]$$

d) Quelques exemples

On fait les calculs sur feuille à part. Toutes les applications prises en exemple sur définies sur tout \mathbb{R} :

Exemple 1 : $f : t \mapsto e^{-|t|/\tau}, \tau > 0$.

Exemple 2 : $f : t \mapsto e^{-|t|/\tau} \cos(\omega_0 t), \tau > 0$ et $\omega_0 > 0$.

Exemple 3 : $f : t \mapsto e^{-t^2/\tau}, \tau >$ (gaussienne). On donne l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \quad \alpha > 0$$

Exemple 4 : $f : t \mapsto e^{-t^2/\tau} \cos(\omega_0 t), \tau > 0$ et $\omega_0 > 0$.

2) Composante monochromatique d'un signal lumineux

Soit S une source ponctuelle qui émet un signal lumineux $a(S, t)$, noté plus simplement $a(t)$. On suppose que $a(t)$ admet une transfor-

mée de Fourier et on pose $\text{TF}[a] = \tilde{a}$. On a donc :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \tilde{a}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{-i\omega t} dt$$

et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{a}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

En mathématiques on peut concevoir $\omega < 0$ mais en physique on préfère travailler avec des pulsations $\omega \geq 0$ qui sont les seules à avoir un sens physique. On transforme donc :

Définition. Composante monochromatique.

Le signal $t \mapsto A_m(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$ est appelé *composante monochromatique* de pulsation ω (ou de fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$) associé au signal $a(t)$.

Conclusion :

Le signal lumineux émis par S peut être regardé comme une somme infinie de signaux monochromatiques qui sont ses composantes monochromatiques. Ceci justifie l'intérêt qu'on porte en physique à un signal purement sinusoïdal.

3) Densité spectrale d'intensité

Revenons à la fonction d'autocorrélation g d'un signal lumineux $a(t)$ émis par une source ponctuelle S . Dans les cas réalistes (c'est à dire lorsque $a(t)$ n'est pas une sinusoïde de pulsation ω_0), $g(\tau)$ tend rapidement vers 0 dès que τ s'écarte un peu de 0. **On suppose donc qu'elle admet une transformée de Fourier** qu'on note \tilde{g} :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \tilde{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

On peut inverser cette relation pour trouver :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

Comme g est une fonction paire et à valeurs réelles, on sait que \tilde{g} est elle aussi paire et à valeurs réelles. Ceci permet d'écrire :

- **Intensité lumineuse I_S**

Définition. Densité spectrale d'intensité

L'application $J_S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \geq 0 \mapsto J_S(\omega) = 2\tilde{g}(\omega)$ s'appelle densité spectrale en intensité. On a alors :

$$I_S = \int_0^{+\infty} J_S(\omega) d\omega$$

Remarque :

J_S n'est définie que pour les pulsations positives et elle coïncide avec $2\tilde{g}$ sur \mathbb{R}_+ .

Interprétation :

$J_S(\omega) d\omega$ est la contribution à I_S des composantes monochromatiques de $a(t)$ dont la pulsation est comprise entre ω et $\omega + d\omega$. L'intensité I_S est donc la somme des contributions de chaque composante monochromatique de $a(t)$.

- **Relation entre g et J_S :**

Définition. Spectre de la lumière émise par S

On appelle *spectre* de la lumière émise par une source ponctuelle S l'ensemble des pulsations $\{\omega \geq 0 \mid J_S(\omega) \neq 0\}$.

J_S est accessible à l'expérience :

4) Les différents types de densités spectrales

Les lumières sont classées selon le type de leur densité spectrale. On le fait sur feuille à part.

- Raie quasimonochromatique**
- Spectre de raies**
- Lumière à spectre continu**