MÉCANIQUE QUANTIQUE

I. Fonction d'onde

- Introduction historique : expérience des trous d'Young. Expérience de Tonomura.
- Interprétation probabiliste : $\Psi(M,t)$ = amplitude (complexe) de probabilité, $|\Psi(M,t)|^2$ = densité de probabilité.
- Position moyenne $< X(t) >$ et indétermination quantique $\Delta X(t)$ sur la position de la particule à l'instant t.

II. Équation de Schrödinger

- Équation de Schrödinger. Principe de superposition lié à la linéarité de cette équation.

$$i\hbar\,\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\Psi + V(M)\Psi$$

- Conservation de la probabilité. Vecteur densité de courant de probabilité $\overrightarrow{j}$ et équation locale de conservation :

$$\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t} + \mathrm{div}\,\overrightarrow{j} = 0$$

avec :

$$\overrightarrow{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi^* - \Psi^*\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi\right)$$

avec comme cas particulier :

$$\overrightarrow{j} = \frac{\hbar\overrightarrow{k}}{m}\,|\Psi|^2 \quad \text{si} \quad \Psi = f(t)\,e^{i\vec{k}.\vec{r}} \text{ onde de De Broglie}$$

III. États stationnaires quantiques

- Relation de planck-Einstein pour le photon. Généralisation à une particule de masse m.
  - État quantique associé à une particule d'énergie bien définie : si $\Psi(M,t) = \varphi(M)e^{-i\omega t}$ alors $E = \hbar\omega$.
  - État quantique associé à une particule d'impulsion bien définie (= onde de De Broglie) : si $\Psi(M,t) = f(t)\,e^{i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}}$ alors $\overrightarrow{p} = \hbar\overrightarrow{k}$. Problèmes avec la normalisation de la probabilité.
- État stationnaire quantique : $\Psi(M,t) = f(t)\times\varphi(M)$. Résolution par séparation des variables :
  - Partie temporelle $f(t) = e^{-iEt/\hbar}$
  - Partie spatiale $\varphi(M)$ solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps (équation aux valeurs propres). Hamiltonien H, valeurs propres, vecteurs propres, degré de dégénérescence d'une énergie E :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta + V(M) \;\; ; \;\; H\varphi(M) = E\varphi(M)$$

  Notation : $\Psi_{\mathrm{stat},E}(M,t) = \varphi(M)e^{-iEt/\hbar}$ pour un état stationnaire d'énergie E.

- Exemple de la particule libre : $\boxed{V(M) = 0}$. Expression de $\varphi(x)$ en dimension 1.

IV. Applications 1D

- Particule dans une marche de potentiel. Prévisions de la mécanique classique. Prévisions de la mécanique quantique pour $E > V_0$ et $E < V_0$. Coefficients de réflexion r et de transmission t. Coefficients de réflexion R et de réflexion T en probabilité. Calcul et représentation de la densité de probabilité $|\Psi_{\mathrm{stat}}(x,t)|^2$. Interprétation.
- Particule dans une barrière de potentiel : effet tunnel.
- Particule dans un puit de potentiel infini. Quantification de l'énergie. Normalisation de la fonction d'onde définie à $e^{i\alpha}$ près.

- Énergie de confinement.

QUESTIONS DE COURS

1. Connaître l'équation de Schrödinger et revoir l'inégalité de Heisenberg dans le cours de MPSI.
2. Énoncer le postulat dit de Planck-Einstein = que signifient des états quantiques de la forme $\Psi(M,t) = \varphi(M)\, e^{-i\omega t}$ et $\Psi(M,t) = f(t)\, e^{i\,\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}}$
3. Reproduire toute la démarche pour obtenir l'expression de la partie temporelle $f(t)$ d'un état stationnaire (résolution par séparation des variables). Lui associer une énergie E. En déduire que la partie spatiale $\varphi(M)$ vérifie l'équation $H\varphi = E\,\varphi$.
4. Connaître la résolution du problème d'une particule dans une marche de potentiel. Expression des solutions, calcul de r et t, calcul de R et T, densité de probabilité dans les deux cas $E > V_0$ et $E < V_0$.
5. Connaître la résolution du problème d'une particule dans un puit de potentiel infini. Quantification de l'énergie.