Corrigé exercice 7 : Physique statistique

Formulaire : pour $\alpha > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} u^3\, e^{-\alpha u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\alpha^2}$$

7 Fuite de gaz (*)

On étudie un gaz parfait monoatomique formé d'atomes assimilés à des points matériels de masse m. Le gaz est thermostaté à la température T et il est enfermé dans un récipeint de volume V.

Dans cet exercice, l'énergie potentielle d'un atome sera supposée nulle : $\varepsilon_p = 0$. On note v la norme de la vitesse.

1. *Déterminer la constante C qui intervient dans la probabilité.*

Puisque $\varepsilon_p = 0$, la probabilité pour que le point représentatif e de la sphérule (assimilée à un point matériel) soit dans le volume $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z$ de l'espace des phases est donnée ici par :

$$\delta\mathcal{P} = C\exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2k_BT}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z$$

On normalise la probabilité en intégrant sur tout l'espace des phases : la probabilité vaut alors 1. Les intégrales sur chaque composante v_x, v_y et v_z de la vitesse se calculent à l'aide de la première formule de l'énoncé et l'intégrale sur les trois coordonnées x, y et z donne le volume V du récipient. On obtient donc :

$$C \times \left(\frac{2\pi k_BT}{m}\right)^{3/2} V = 1$$

et donc :

$$\boxed{C = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\frac{1}{V}}$$

2. *Déterminer la valeur moyenne $< v^2 >$ en fonction de k_B, T et m. Application numérique pour l'hélium gazeux à 25°C avec M(He) = 4 g.mol^{-1}. Calculer la vitesse quadratique moyenne $v_{qm} = \sqrt{< v^2 >}$.*

On peut utililiser ici le théorème d'équipartition de l'énergie : très conseillé car cela accèlère fortement le calcul de cette valeur moyenne. Comme l'énergie d'un atome s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$$

on constate qu'il y a <u>3 degrés</u> de liberté quadratiques : v_x, v_y et v_z. On a donc :

$$< \frac{1}{2}mv_x^2 > = < \frac{1}{2}mv_y^2 > = < \frac{1}{2}mv_z^2 > = \frac{1}{2}\,k_BT$$

et donc :

$$\boxed{< v_x^2 > = < v_y^2 > = < v_z^2 > = \frac{k_BT}{m}}$$

On en déduit :

$$\boxed{< v^2 > = < v_x^2 > + < v_y^2 > + < v_z^2 > = \frac{3k_BT}{m}}$$

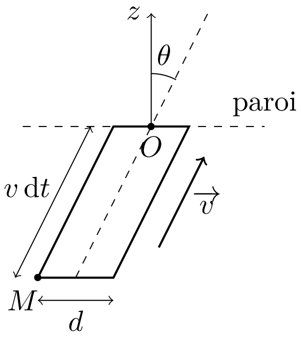
A.N. avec $m = M(\mathrm{He})/\mathcal{N}_A = 6{,}64.10^{-27}$ kg. On trouve :

$$\boxed{v_{qm} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = 1{,}36.10^3\ \mathrm{m.s^{-1}}}$$

3. *L'une des parois du récipient est percée d'un petit trou circulaire de centre O et de diamètre d suffisamment petit pour ne pas perturber l'équilibre du gaz. On suppose que les atomes ne peuvent que sortir du récipient (aucun atome ne peut y entrer). On note $N(t)$ le nombre d'atomes dans le récipient à l'instant t.*

a) *Dans quel volume* $\mathrm{d}V$ *sont situés les atomes qui traversent le trou entre* t *et* $t+\mathrm{d}t$ *avec un vecteur vitesse* $\overrightarrow{v}$ *de norme* v *et dont l'orientation est donnée par les angles* θ *et* φ *indiqués sur la figure ?*

Raisonnement classique : ils sont situés dans le petit cylindre représenté sur la figure ci-dessous. Il a pour surfaces de base deux disques de même diamètre d et pour longueur des génératrices $v\,\mathrm{d}t$ (les génératrices étant orientées dans la direction de $\overrightarrow{v}$) :



Il faut donc savoir exprimer le volume de ce cylindre dont les génératrices ne sont pas orthogonales aux base. Il est donné par :

$$\boxed{\mathrm{d}V = \frac{\pi d^2}{4}\, v\,\mathrm{d}t\, \cos\theta}$$

b) *Quel est alors le nombre moyen* $\delta\overline{N}_{\overrightarrow{v}}$ *d'atomes qui sont situés dans ce volume, avec un vecteur vitesse* $\overrightarrow{v}$ *?*

La probabilité pour qu'un atome ait un vecteur vitesse (v_x, v_y, v_z) et soit en même temps situé dans $\mathrm{d}V$ est égale à la probabilité que son point représentatif e dans l'espace des phases soit dans le volume élémentaire $\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, avec $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}V$, ce volume étant repéré par le point $P(x_M, y_M, z_M, v_x, v_y, v_z) \in$ Espace Phases (M étant le point représenté sur la figure ci-contre). On a donc :

$$\delta\mathcal{P} = C \exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2k_BT}\right)\mathrm{d}V\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z$$

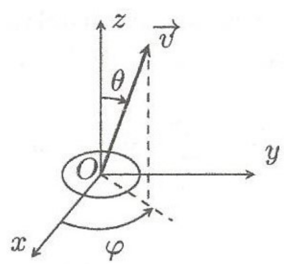
Pour obtenir le nombre moyen d'atomes dans $\mathrm{d}V$ ayant ce vecteur vitesse, à l'instant t, il faut multiplier $\delta\mathcal{P}$ par $N(t)$:

$$\boxed{\delta\overline{N}_{\overrightarrow{v}} = N(t)\, C \exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2k_BT}\right)\mathrm{d}V\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z}$$

c) *En déduire le nombre moyen d'atomes* $\delta\overline{N}$ *qui traversent le trou entre* t *et* $t+\mathrm{d}t$ *pour toutes les valeurs possibles de* θ, φ *et* v. *On écrira le résultat sous la forme d'une intégrale que l'on calculera.*

Il faut donc maintenant sommer sur toutes les valeurs possibles de la vitesse. Il est judicieux ici de repérer le vecteur vitesse (v_x, v_y, v_z) par ses coordonnées sphériques (v, θ, φ). Idem pour " l'élément de volume " :

$$\boxed{\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z = v^2\,\mathrm{d}v \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}$$



On a donc :

$$\begin{aligned}\delta\overline{N}_{\vec{v}} &= N(t)\,C\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)\,\mathrm{d}V\,v^2\,\mathrm{d}v\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\ &= N(t)\,C\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)\,\frac{\pi\,d^2}{4}\,v^3\,\mathrm{d}v\cos\theta\,\;\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On intègre sur toutes les valeur possibles de (v,θ,φ), donc $v\in[0,+\infty[$, $\theta\in[0,\pi/2]$ et $\varphi\in[0,2\pi[$. On obtient :

$$\begin{aligned}\delta\overline{N} &= N(t)\,C\,\frac{\pi\,d^2}{4}\,\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}\,2\pi\int_0^{+\infty}v^3\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)\mathrm{d}v\;\mathrm{d}t\\ &= N(t)\,C\,\frac{\pi^2\,d^2}{8}\,\left(\frac{2k_BT}{m}\right)^2\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

où l'intégrale sur v se calcule grâce au formulaire.

En remplaçant C par son expression, on obtient :

$$\boxed{\delta\overline{N} = \frac{N(t)}{V}\,\frac{d^2}{8}\,\sqrt{\frac{2\pi k_BT}{m}}\,\mathrm{d}t}$$

d) *Quelle est la relation entre $N(t)$, $N(t+\mathrm{d}t)$ et $\delta\overline{N}$? En déduire une équation différentielle satifaite par $N(t)$. En donner la solution et introduire un temps caractéristique τ pour cette fuite de gaz.*

On utilise la conservation du nombre d'atomes :

$$\boxed{N(t+\mathrm{d}t) = N(t) - \delta\overline{N}}$$

En écrivant (raisonnement classique) :

$$N(t+\mathrm{d}t) - N(t) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

on obtient l'équation différentielle cherchée :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\frac{N(t)}{V}\,\frac{d^2}{8}\,\sqrt{\frac{2\pi k_BT}{m}}$$

soit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + \frac{N}{\tau} = 0}$$

avec :

$$\boxed{\tau = \frac{8V}{d^2}\,\sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}}$$

temps caractéristique.

e) *Calculer en fonction de τ la durée Δt au bout de laquelle la pression $P(t)$ dans le récipient est divisée par 2. Proposer une application numérique pour un trou de dimension typique d = 0,1 mm*

La pression $P(t)$ dans le récipent à l'instant t est donnée par l'équation d'état du gaz parfait. Si $n(t)$ est le nombre de moles à l'instant t, alors :

$$\boxed{P(t) = \frac{n(t)\,RT}{V} = \frac{N(t)\,RT}{\mathcal{N}_A\,V} = \frac{N(t)\,k_BT}{V}}$$

On résout l'équation différentielle précédente :

$$N(t) = N(0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et donc :

$$\boxed{P(t) = \underbrace{\frac{N(0)\,k_BT}{V}}_{=P(0)}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = P_0\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

On cherche donc Δt telle que $P(\Delta t) = P_0/2$, ce qui donne :

$$\boxed{\Delta t = \tau \ln(2)}$$

A.N. On prendra $V = 5$ L, $T = 300$ K et m calculée à la question 2. On obtient : $\tau = 2021$ s et donc :

$$\boxed{\Delta t = 1{,}40.10^3 \text{ s} \approx 23 \text{ minutes}}$$