Corrigé exercice 4 : Physique statistique

4 Système à trois niveaux

On considère un système en équilibre avec un thermostat à la température T. Les $N \gg 1$ atomes qui le constituent peuvent occuper trois niveaux d'énergie, $\varepsilon_1 = -\varepsilon$, $\varepsilon_2 = 0$ et $\varepsilon_3 = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).

1. *Calculer les nombres moyens $< N_i >$ (i = 1,2,3) d'atomes dans les trois états. Commenter les limites basse et haute température.*

Par définition, le nombre moyen $< N_i >$ (i = 1,2,3) d'atomes occupant le niveau d'énergie ε_i est le produit du nombre total d'atomes par la probabilité $P(\varepsilon_i)$ d'occuper ce niveau. On a donc :

$$< N_i > = N\,\mathcal{P}(\varepsilon_i) \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}(\varepsilon_i) = C\,\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{k_B T}\right)$$

La constante de normalisation C se calcule par :

$$C\left\{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) + 1 + \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)\right\} = 1$$

d'où :

$$\boxed{C = \frac{1}{1 + 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}}$$

et donc :

$$\boxed{< N_1 > = \frac{N\,\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{1 + 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)} \quad ; \quad < N_2 > = \frac{N}{1 + 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}}$$

et

$$\boxed{< N_3 > = \frac{N\,\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{1 + 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}}$$

- À haute température, $\varepsilon/k_B T \longrightarrow 0$, donc $\mathrm{ch}(\varepsilon/k_B T) \longrightarrow 1$ et $\exp(\varepsilon/k_B T) \longrightarrow 1$. On a donc :

$$\boxed{\forall\, i \in \{1,2,3\},\ < N_i > \longrightarrow \frac{N}{3}}$$

On retrouve le fait que tous les niveaux sont peuplés de façon équiprobable.

- À basse température $\varepsilon/k_B T \longrightarrow +\infty$, donc $\mathrm{ch}(\varepsilon/k_B T) \sim \frac{\exp(\varepsilon/k_B T)}{2}$, ce qui conduit à :

$$< N_1 > \sim \frac{N\,\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{1 + \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)} \longrightarrow N$$

$$< N_2 > \sim \frac{N}{1 + \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)} \longrightarrow 0$$

et

$$< N_3 > \sim \frac{N\,\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{1 + \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)} \longrightarrow 0$$

On retrouve ici le fait que seul le niveau fondamental est peuplé (approximation basse température).

2. *Calculer l'énergie moyenne $< \varepsilon >$ d'un atome. Tracer son évolution en fonction de la température et commenter le résultat.*

On va utiliser la définition de l'énergie moyenne :

$$< \varepsilon > = -\,\varepsilon\,\mathcal{P}(\varepsilon_1) + 0 \times \mathcal{P}(\varepsilon_2) + \varepsilon\,\mathcal{P}(\varepsilon_3)$$

d'où :

$$\boxed{<\varepsilon>= -2\varepsilon \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{1+2\operatorname{ch}\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}}$$

On remarque que :

- À haute température $\varepsilon/k_B T \longrightarrow 0$ et donc $<\varepsilon>\longrightarrow 0$, ce qui est cohérent avec l'équiprobabilité :

$$\boxed{<\varepsilon>\longrightarrow \frac{-\varepsilon}{3}+\frac{0}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=0}$$

- À basse température $\varepsilon/k_B T \longrightarrow +\infty$ et donc :

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) \sim \frac{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{2} \quad ; \quad \operatorname{ch}\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) \sim \frac{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{2}$$

  ce qui entraîne :

$$\boxed{<\varepsilon>\longrightarrow -\varepsilon}$$

  cohérent à nouveau puisque seul le niveau fondamental est peuplé avec une proba. non négligeable.

3. *Décrire qualitativement l'évolution de la capacité thermique à volume constant $C_V(T)$.*

On peut commencer par représenter l'allure de $<\varepsilon>$ puis en déduire celle de $C_V(T)$ puisque celle-ci est la dérivée par rapport à T de $U = N <\varepsilon>$: