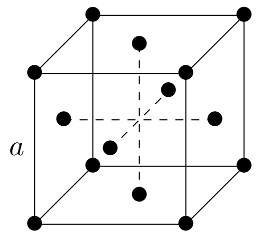
Corrigé du DM n°5

1 Cristallographie

1. La maille élémentaire est un cube d'arête a. Il y a un atome sur chaque sommet du cube et un au centre de chaque face.



Dans une maille, il y a en propre :

$$N = 8/8 + 6/2 = 4 \text{ atomes}$$

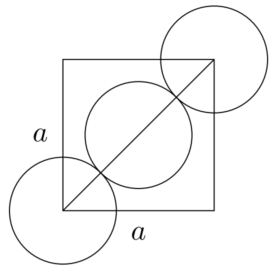
ce qui donne une masse volumique :

$$\rho = \frac{N\,m}{a^3} = \frac{N\,\mathrm{M(Rh)}}{\mathcal{N}_A\,a^3}$$

où m est la masse d'un atome, égale à $\mathrm{M(Rh)}/\mathcal{N}_A$ où $\mathcal{N}_A$ est la constante d'Avogadro. On en déduit :

$$\boxed{a = \left(\frac{N\,\mathrm{M(Rh)}}{\mathcal{N}_A\,\rho}\right)^{1/3} = 381 \text{ pm}}$$

Les atomes, assimilés à des boules de rayon R (rayon métallique), se touchent le long de la diagonale d'une face du cube :



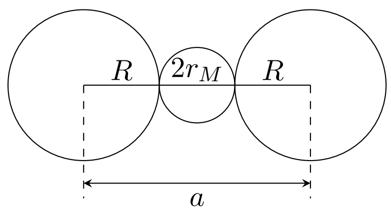
On a donc :

$$\boxed{4R = \sqrt{2}\,a \iff R = \frac{\sqrt{2}}{4}\,a = 135 \text{ pm}}$$

2. La coordinence d'un atome est son *nombre de plus proches voisins*. Dans un réseau métallique cubique faces centrées elle est identique pour chaque atome du réseau et elle vaut 12.
3. La compacité C est le rapport entre le volume effectivement occupé par les atomes (assimilés à des boules de rayon R) et le volume de la maille cubique :

$$\boxed{C = \frac{N \times \frac{4\pi}{3}\,R^3}{a^3} = 4 \times \frac{4\pi}{3}\,\frac{2\sqrt{2}}{4 \times 4 \times 4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} = 0{,}74}$$

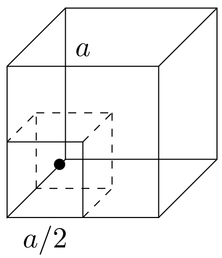
4. Les sites octaédriques O d'un réseau cubique à faces centrées occupent le milieu de chaque arête, ainsi que le centre du cube. Ils sont tous équivalents. Si on raisonne sur un milieu d'arête on peut y insérer une boule de rayon r_M, entre les deux atomes de rayon R qui occupent les sommets



On a :

$$\boxed{2R + 2r_M = a \iff r_M = \frac{a}{2} - R = 55\ \text{pm}}$$

Les sites tétraédriques occupent les centres des 8 petits cubes d'arête $a/2$. Un de ces 8 sites est représenté sur le schéma ci-dessous :



Il y a contact le long de la demi-grande diagonale du petit cube :

$$R + r_T = \sqrt{3}\,\frac{a}{4}$$

et donc :

$$\boxed{r_T = \sqrt{3}\,\frac{a}{4} - R = 30\ \text{pm}}$$

5. Comptons le nombre de sites octaédriques qui appartiennent en propre à un maille cubique :

$$N_O = 12/4 + 1 = 4$$

On en déduit :

$$\boxed{C = \frac{N \times \frac{4\pi}{3} R^3 + N_O \times \frac{4\pi}{3} r_M^3}{a^3} = \frac{16\pi}{3}\,\frac{R^3 + r_M^3}{a^3} = 0{,}80}$$

2 Cinétique chimique

La réaction étant d'ordre 1, la loi cinétique régissant la vitesse de réaction à volume constant s'écrit :

$$v = -\frac{\mathrm{d}[\mathrm{AsH_3}]}{\mathrm{d}t} = k\,[\mathrm{AsH_3}] \tag{1}$$

où k est la constante de vitesse à la température de l'expérience. Dressons un tableau d'avancement où $\xi(t)$ est l'avancement de la réaction à l'instant t et où $n_g(t)$ est le nombre total de moles de gaz à l'instant t :

	AsH_3	As	H_2	$n_g(t)$
$t=0$	n_0	0	0	n_0
$t>0$	$n_0 - \xi(t)$	$\xi(t)$	$3\xi/2$	$n_0 + 3\xi(t)/2$

La pression est donnée par la loi des gaz parfaits :

$$P_0 = P(t=0) = \frac{n_0 RT}{V}$$

et

$$P(t) = \frac{n_g(t)RT}{V} = \left(n_0 + \frac{3\xi(t)}{2}\right)\frac{RT}{V} = P_0 + \frac{3}{2}\,RT\,\frac{\xi(t)}{V}$$

On en déduit l'expression de la concentration $[\mathrm{AsH_3}](t)$ à l'instant t en fonction de la pression $P(t)$:

$$[\mathrm{AsH_3}](t) = \frac{n_0 - \xi(t)}{V} = \frac{P_0}{RT} - \frac{2\,(P(t) - P_0)}{3RT} = \frac{5P_0 - 2P(t)}{3RT}$$

L'équation différentielle vérifiée par la pression totale s'en déduit en substituant cette expression dans l'équation (1) :

$$\frac{2}{3RT}\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = k\,\frac{5P_0 - 2P(t)}{3RT}$$

et donc :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + kP = \frac{5k\,P_0}{2}} \tag{2}$$

La solution générale de cette équation est :

$$P(t) = \frac{5P_0}{2} + A\,e^{-kt}$$

$P(t=0) = P_0 \implies A = -\frac{3P_0}{2}$ et donc :

$$P(t) = \frac{P_0}{2}\left(5 - 3\,e^{-kt}\right)$$

Posons P_1 la valeur particulière de P lorsque $t = t_1 = 3\text{h}$. En isolant k, nous obtenons :

$$k = -\frac{1}{t_1}\ln\left(\frac{5 - 2P_1/P_0}{3}\right)$$

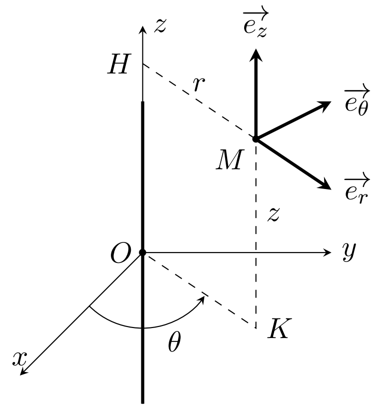
A.N. :

$$\boxed{k = 2{,}8.10^{-2}\ \mathrm{h}^{-1} = 7{,}7.10^{-6}\,\mathrm{s}^{-1}}$$

3 Théorème de Gauss

a) Champ créé par un fil

Le fil est supposé infini et il coïncide avec l'axe Oz. On utilise les coordonnées cylindriques : un point M quelconque sera repéré par ses coordonnées (r, θ, z). La base cylindrique locale en M est notée $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.



À priori, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\,\overrightarrow{e_r} + E_\theta(r,\theta,z)\,\overrightarrow{e_\theta} + E_z(r,\theta,z)\,\overrightarrow{e_z}$$

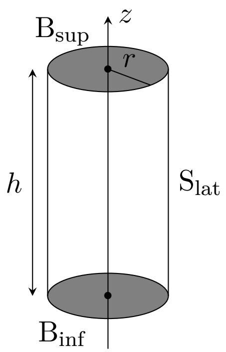
Étude des symétries et des invariances :

- Les plans $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ et $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ sont deux plans de symétrie de la distribution de charges, qui contiennent le point M. On en déduit que :
$$\overrightarrow{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\,\overrightarrow{e_r}$$
- La distribution de charges est invariante par toute translation de direction $\overrightarrow{e_z}$ et par toute rotation d'axe Oz. Il en résulte que :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = E_r(r)\,\overrightarrow{e_r} \overset{\text{noté}}{=} E(r)\,\overrightarrow{e_r}}$$

Le champ électrostatique est donc à *symétrie cylindrique*.

On choisit comme surface de Gauss S_G un cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon r. Le flux de $\overrightarrow{E}$ sur les bases supérieure et inférieure est nul puisque $\overrightarrow{E} \perp \mathrm{d}\overrightarrow{S}$.



Il vient :

$$\begin{aligned}\Phi\left(\overrightarrow{E}/S_G\right) &= \iint_{\mathrm{B_{inf}}} \overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_{\mathrm{B_{sup}}} \overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_{\mathrm{S_{lat}}} \overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} \\ &= \iint_{\mathrm{S_{lat}}} \overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{\mathrm{S_{lat}}} E(r)\,\mathrm{d}S \\ &= E(r)\,2\pi r\,h\end{aligned}$$

La charge électrique intérieure à S_G est $Q_{\text{int}} = \lambda\,h$ et le théorème de Gauss conduit à :

$$\Phi\left(\overrightarrow{E}/S_G\right) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\,r}}$$

On calcule ensuite le potentiel électrostatique V grâce à $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, ce qui conduit en coordonnées cylindriques à l'équation :

$$E(r)\,\overrightarrow{e_r} = -\frac{\partial V}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} - \frac{\partial V}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}$$

On projette sur la base cylindrique pour trouver :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

ce qui montre que V ne dépend que de r et que :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\,E(r) \implies V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + C$$

où C est une constante d'intégration. Comme l'énoncé impose le choix $V(R) = 0$ (R étant une distance quelconque maix fixée), on obtient :

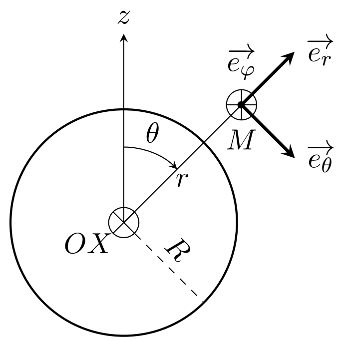
$$C = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(R)$$

et donc :

$$\boxed{V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R}{r}\right)}$$

b) Champ créé par une sphère

On utilise ici les coordonnées sphériques : un point M quelconque sera repéré par ses coordonnées (r, θ, φ). La base sphérique locale en M est notée $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$.



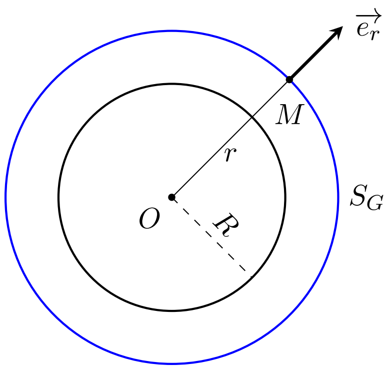
À priori, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\,\overrightarrow{e_r} + E_\theta(r,\theta,\varphi)\,\overrightarrow{e_\theta} + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

Étude des symétries et des invariances :

- Les plans $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\varphi})$ sont deux plans de symétrie de la distribution de charges, qui contiennent le point M. On en déduit que :
$$\overrightarrow{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\,\overrightarrow{e_r}$$
- La distribution de charges est invariante par <u>toute</u> rotation d'axe Oz et par <u>toute</u> rotation d'axe OX (axe perpendiculaire au plan (Oz, OM)). Il en résulte que :
$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = E_r(r)\,\overrightarrow{e_r} \overset{\text{noté}}{=} E(r)\,\overrightarrow{e_r}}$$
Le champ électrostatique est donc à *symétrie sphérique.*

On choisit comme surface de Gauss S_G une sphère de centre O et de rayon r.



Il vient :

$$\Phi\left(\overrightarrow{E}/S_G\right) = \iint_{S_G} E(r)\overrightarrow{e_r}.\mathrm{d}S\overrightarrow{e_r} = E(r)\,4\pi r^2$$

La charge électrique intérieure à S_G dépend de la valeur de r.

- Si $r < R$ alors $Q_{\text{int}} = 0$.
- Si $r > R$ alors $Q_{\text{int}} = \sigma\,4\pi R^2$

Le théorème de Gauss conduit donc aux deux expressions :

$$4\pi r^2\,E(r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r < R \\ \frac{\sigma\,4\pi R^2}{\varepsilon_0} & \text{si} \quad r > R \end{cases}$$

c'est à dire :

$$E(r) = 0 \quad \text{si } r < R \quad \text{et} \quad E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\frac{R^2}{r^2} \quad \text{si } r > R$$

Remarque :

$E(R^+) - E(R^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, ce qui est typique de la discontinuité (relation de passage) du champ électrostatique à la traversée d'une surface chargée avec une densité surfacique σ.

Calcul du potentiel électrostatique :

Procédons de façon un peu différente par rapport à la question a). Le potentiel admettant les mêmes invariances que la distribution de charges, il ne peut dépendre que de r : $V = V(r)$. On a donc :

$$\overrightarrow{E} = E(r)\,\overrightarrow{e_r} = -\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_r} \implies \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\,E(r)$$

Il s'ensuit que :

- Si $r < R$ alors $V(r) = C_1$
- Si $r > R$ alors : $V(r) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\dfrac{R^2}{r} + C_2$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration. Comme $V \longrightarrow 0$ lorsque $r \longrightarrow +\infty$, on obtient $C_2 = 0$. De plus, la continuité du potentiel en $r = R$ entraîne :

$$C_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,R$$

En conclusion :

$$\boxed{V(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R \quad \text{si } r < R \quad \text{et} \quad V(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r} \quad \text{si } r > R}$$

On remarque que le volume intérieur à la sphère est équipotentiel.

4 Étude de symétrie

1. a) Soit M un point de l'axe Oz. Ses coordonnées sont $(0, 0, z)$ et le champ électrostatique en ce point s'écrit à priori sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(M) = E_x(z)\,\overrightarrow{e_x} + E_y(z)\,\overrightarrow{e_y} + E_z(z)\,\overrightarrow{e_z}$$

Les plans (Oxz) et (Oyz) étant deux plans de symétrie de la distribution de charges contenant le point M, il s'ensuit que : $E_x = E_y = 0$ et donc que :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = E_z(z)\,\overrightarrow{e_z}}$$

b) Soit maintenant M un point du plan Oxy. Ses coordonnées sont $(x, y, 0)$ et le champ électrostatique en ce point s'écrit à priori sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(M) = E_x(x,y)\,\overrightarrow{e_x} + E_y(x,y)\,\overrightarrow{e_y} + E_z(x,y)\,\overrightarrow{e_z}$$

Or, le plan (Oxy) est un plan d'anti-symétrie de la distribution de charges, contenant le point M, et il en résulte que $E_x = E_y = 0$, d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = E_z(x,y)\,\overrightarrow{e_z}}$$

2. Le plan (Oxy) étant un plan d'anti-symétrie de la distribution de charges, le champ électrostatique est transformé en l'opposé de son symétrique de part et d'autre de ce plan. Cela signifie que, si M est un point de coordonnées (x, y, z) et que M' est son symétrique par rapport à (Oxy), c'est à dire le point de coordonnées $(x, y, -z)$, alors :

$$\overrightarrow{E}(M') = -\,\mathrm{sym}_{Oxy}\,\overrightarrow{E}(M)$$

ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} E_x(x,y,-z) &= -\,E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,-z) &= -\,E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,-z) &= E_x(x,y,z) \end{aligned}$$

3. Comme le plan (Oyz) est un plan de symétrie de la distribution de charges, si M est un point de coordonnées (x, y, z) et que M' est son symétrique par rapport à (Oyz), c'est à dire le point de coordonnées $(-x, y, z)$ alors :

$$\overrightarrow{E}(M') = \mathrm{sym}_{Oyz}\,\overrightarrow{E}(M)$$

ce qui se traduit en projetant sur $\overrightarrow{e_x}$ par :

$$E_x(-x,y,z) = -\,E_x(x,y,z)$$