Corrigé du DM n°9

1 Interaction entre dipôles électrostatiques

1. a) D'après une relation de cours :

$$\boxed{\overrightarrow{E_1}(M) = \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}\,(\,2\cos\theta_1\,\overrightarrow{u} + \sin\theta_1\,\overrightarrow{u_1}\,)}$$

b) On a $\overrightarrow{p_2} = p_2\,(\,\cos\theta_2\,\overrightarrow{u} + \sin\theta_2\,\overrightarrow{u_1}\,)$, ce qui donne :

$$\boxed{E_p = -\,\overrightarrow{p_2}.\overrightarrow{E_1}(M) = -\,\frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}\,(\,2\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)}$$

c) On regarde E_p comme une fonction de θ_2. La position d'équilibre correspond à un extremum de l'énergie potentielle. On calcule donc :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta_2} &= -\,\overrightarrow{p_2}.\overrightarrow{E_1}(M)\\ &= -\,\frac{p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}\,(\,-\,2\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) = 0\end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$2\cos\theta_1\sin\theta_{2e} = \sin\theta_1\cos\theta_{2e} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\tan\theta_{2e} = \frac{\tan\theta_1}{2}}$$

A.N. : Pour : $\theta_1 = 0$: $\theta_{2e} = 0$; $\theta_1 = \pi/4$: $\theta_{2e} = 26°$; $\theta_1 = \pi/2$: $\theta_{2e} = 90°$

d) On calcule $\overrightarrow{p_2}\wedge\overrightarrow{E_1}(M)$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_z})$:

$$\overrightarrow{p_2}\wedge\overrightarrow{E_1}(M) = \frac{p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}\begin{bmatrix}\cos\theta_{2e}\\ \sin\theta_{2e}\\ 0\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}2\,\cos\theta_1\\ \sin\theta_1\\ 0\end{bmatrix}$$

d'où :

$$\overrightarrow{p_2}\wedge\overrightarrow{E_1}(M) = \frac{p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}\,(\cos\theta_{2e}\sin\theta_1 - 2\sin\theta_{2e}\cos\theta_1)\,\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{0}$$

en utilisant la relation de la question précédente. Ainsi les deux vecteurs sont bien colinéaires, ce qui est cohérent avec le fait que ce soit une position d'équilibre.

2. a) On élimine $\sin(\theta_{2e}) = \tan(\theta_{2e})\cos(\theta_{2e})$ grâce à la relation de la question 1.c) et on utilise aussi le fait que $\cos\theta_{2e} = 1/\sqrt{1+\tan^2(\theta_{2e})} = 1/\sqrt{1+\tan^2(\theta_1)/4} = 2\cos(\theta_1)/\sqrt{3\cos^2\theta_1+1}$. On obtient bien le résultat demandé.

L'énergie est minimale lorsque $\sqrt{3\cos^2\theta_1+1}$ est le plus grand possible, ce qui correspond à $\theta_1 = 0$.

b) Dans cette position, $\overrightarrow{p_2}$ est sur l'axe Ox, avec $\overrightarrow{p_2} = p_2\,\overrightarrow{u_x}$, à une distance $r = x$ de $\overrightarrow{p_1}$. L'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p = -\,\frac{p_1p_2}{2\pi\varepsilon_0\, x^3}$$

$$\overrightarrow{F} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_p = -\,\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\,\overrightarrow{u_x}$$

d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\,\frac{3p_1}{2\pi\varepsilon_0\, x^4}\,\overrightarrow{u_x}}$$

La force est donc attractive. A.N. : F = 2,53.10^{-10} N.

2 L'expérience de Stern et Gerlach (d'après Mines-Ponts PC 2008)

1.

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m_e}} \overset{AN}{=} 1{,}7.10^3\ \mathrm{m.s^{-1}}}$$

Ainsi, $v_0 \ll c$ et les atomes ne sont pas relativistes. On peut donc appliquer la mécanique newtonienne pour étudier leur mouvement.

2. L'énergie potentielle d'un dipôle dans le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ s'écrit $E_p = -\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{\mathcal{M}}.(az\,\overrightarrow{e_z}) = -\mathcal{M}_z\,az$. La force associée s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p = \mathcal{M}_z a\,\overrightarrow{e_z}}$$

qui est une façon valable de calculer la force car le vecteur moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est constant, toujours dirigé selon $\overrightarrow{e_z}$ et donc indépendant de la position de l'atome.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un atome s'écrit, en négligeant la force de pesanteur :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_z a\,\overrightarrow{e_z}$$

soit en projection sur la base cartésienne :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathcal{M}_z a}{m}$$

Les atomes entrent dans la zone où règne le champ magnétique au point O avec une vitesse $v_0\,\overrightarrow{e_x}$, donc les équations du mouvement s'intègrent en :

$$x(t) = v_0 t \quad ; \quad y(t) = 0 \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{\mathcal{M}_z a}{2m}t^2$$

Le mouvement se fait dans le plan Oxz et la trajectoire s'obtient en éliminant le temps entre $x(t)$ et $z(t)$:

$$\boxed{z = \frac{\mathcal{M}_z a}{2m}t^2 = \frac{\mathcal{M}_z a}{2m}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{\mathcal{M}_z a}{4E_c}x^2}$$

3. Les atomes sortent de la région où règne le champ magnétique à la côte $z(\ell) = \mathcal{M}_z a\ell^2/(4E_c)$, et la pente de leur trajectoire par rapport à l'axe x vaut $(dz/dx)(\ell) = \mathcal{M}_z a\ell/(2E_c)$.

Leur trajectoire est ensuite rectiligne, de pente égale à la pente précédente. Par conséquent, on peut écrire :

$$\frac{z_0 - z(\ell)}{D} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(\ell) \iff z_0 = z(\ell) + D\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(\ell)$$

et donc :

$$\boxed{z_0 = \frac{\mathcal{M}_z a\ell^2}{4E_c} + D\,\frac{\mathcal{M}_z a\ell}{2E_c} = \frac{\mathcal{M}_z a\ell}{2E_c}\left(D + \frac{\ell}{2}\right)}$$

4. Les deux taches correspondent à deux valeurs opposées de z_0. Dans l'expression précédente, toutes les grandeurs sont positives sauf $\mathcal{M}_z$, dont le signe dépend du sens du vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ par rapport à l'axe z. Par conséquent la projection selon $\overrightarrow{e_z}$ du moment magnétique du lithium ne peut prendre que deux valeurs opposées $\pm\mathcal{M}$. Le moment magnétique *est donc quantifié.*

5. De la relation

$$z_0 = \frac{\mathcal{M}_z a\ell}{2E_c}\left(D + \frac{\ell}{2}\right)$$

on déduit

$$\boxed{\mathcal{M}_z = \frac{2E_c z_0}{a\ell(D+\ell/2)} = 0,955.10^{-23}\text{A.m}^2}$$

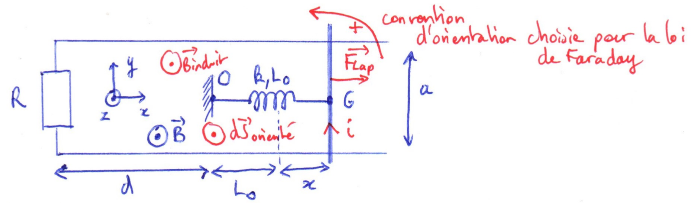
6. Aux deux valeurs possibles de M_z correspondent deux valeurs possibles de S_z, qui valent numériquement :

$$S_z = \pm\,0{,}5\hbar$$

On trouve donc que le spin de l'électron vaut donc $\pm\dfrac{\hbar}{2}$.

3 Rail de Laplace avec un ressort

1)



A l'instant initial, on lâche la barre depuis $x_0 > 0$, et le ressort est donc étiré de sorte que la tige va se déplacer vers la gauche sous l'effet de la force de tension du ressort $\vec{F_r}$.

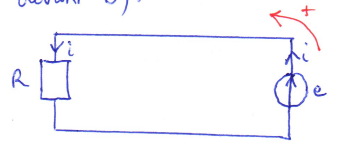
Un phénomène d'induction de Lorentz se produit alors puisque le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit varie. Il apparaît donc un courant induit dont le sens est tel qu'il va produire une force de Laplace qui va avoir tendance à s'opposer au phénomène qui lui a donné naissance (loi de Lenz), c'est à dire que $\vec{F}_{Laplace} \,//\, +\vec{U_x}$ au tout début du mouvement.

On en déduit que le courant induit est positif dans le sens représenté sur le schéma (au moins au début du mouvement), de sorte que $\vec{F}_{Laplace} = \int_{tige} i\,\vec{d\ell} \wedge \vec{B} = i a B \vec{U_x}$

Remarque : on peut également retrouver l'orientation du courant induit au début du mouvement en raisonnant sur le flux : lors du déplacement de la tige vers la gauche, le flux de $\vec{B}$ orienté selon $+\vec{U_z}$ diminue, donc le phénomène d'induction crée un courant induit qui va faire en sorte de s'opposer à cette diminution. Avec l'orientation de i choisie sur le schéma, on a bien création d'un champ magnétique induit $\vec{B}_{induit}$ qui va tenter de compenser la diminution du flux car $\vec{B}_{induit} \,//\, +\vec{U_z}$ (orientation déduite de la règle de la main droite).

Dans la suite du mouvement, on s'attend à ce que la tige oscille autour de la position d'équilibre $x=0$, et que l'amplitude de ces oscillations diminue à cause des pertes par effet Joule dans la résistance.

2) Le schéma électrique équivalent est le suivant (on néglige l'auto-induction du montage, c'est à dire qu'on néglige $\vec{B}_{induit}$ devant $\vec{B}$) :



e est orienté dans le sens de la convention choisie pour la loi de Faraday, et i est choisi comme précédemment.

donc : $e = Ri$

avec $e = -\dfrac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\left[\iint \vec{B}\cdot \vec{dS}_{orienté}\right] = -\dfrac{d}{dt}\left[Ba(d+L_0+x)\right]$

$//+\vec{U_z}$; cf schéma précédent. $//+\vec{U_z}$ avec règle de la main droite. notation sur la première figure

d'où $e = -Ba\dot{x}$ et finalement $\boxed{Ri = -Ba\dot{x}}$ (EE)

On vérifie bien qu'au début du mouvement, lorsque $i>0$, $\dot{x}<0$ car la tige se déplace vers la gauche et $x \searrow$.

3) On applique le PFD à la tige dans le référentiel galiléen du circuit fixe :

$m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F_r} + \vec{F}_{Lap}$

En projection sur $\vec{U_x}$: $\boxed{m\ddot{x} = -kx + iaB}$ (EM)

cf discussion en introduction. si $x>0$, on vérifie que $\vec{F_r} \,//\, -\vec{U_x}$

4) On injecte (EE) dans (EM) :

$m\ddot{x} = -kx - \dfrac{(Ba)^2}{R}\dot{x}$ soit $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{(Ba)^2}{mR}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0}$ (ED)

$\dfrac{(Ba)^2}{mR} = 1/\tau$; $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$

on obtient l'équation d'un oscillateur harmonique amorti autour de $x=0$.

5) L'équation caractéristique correspondante est $r^2 + \dfrac{r}{\tau} + \omega_0^2 = 0$

et $\Delta = \dfrac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2 = \dfrac{1}{\tau^2}\left(1 - 4\omega_0^2\tau^2\right) < 0$ si $\omega\tau \gg 1$ (ceci correspond à τ grand, c'est à dire à un faible amortissement, et on s'attend donc à observer des oscillations avant l'amortissement complet vers $x=0$).

La solution correspond à celle d'un régime pseudo-périodique avec $x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}\left[A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\right]$

$$r_\pm = -\frac{1}{2\tau} \pm \frac{1}{2\tau}\sqrt{1-4\omega_0^2\tau^2} \simeq \underset{\omega_0\tau \gg 1}{-\frac{1}{2\tau}} \pm i\omega_0$$

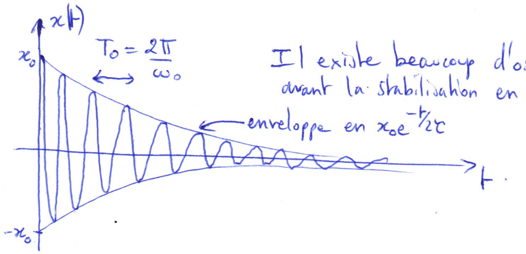
or à $t=0$, $x(0) = A = x_0$

et $\dot{x}(0) = \left[e^{-t/2\tau}\left(-\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos\omega_0 t - \frac{A}{2\tau}\cos(\omega_0 t) - \frac{B}{2\tau}\sin(\omega_0 t)\right)\right]_{t=0}$

$= \omega_0 B - \frac{A}{2\tau} = 0 \Rightarrow B = \frac{A}{2\omega_0\tau}$

Donc $x(t) = e^{-t/2\tau}\left[x_0\cos(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{x_0}{2\omega_0\tau}}_{\text{négligeable car } \omega_0\tau \gg 1}\sin(\omega_0 t)\right]$

Finalement $\boxed{x(t) \simeq x_0 e^{-t/2\tau}\cos(\omega_0 t)}$



Il existe beaucoup d'oscillations avant la stabilisation en $x=0$ car $\tau \gg \frac{1}{\omega_0}$.

6) Afin d'effectuer un bilan de puissance : on combine (EE) et (EM) :

(EE) $\times\, i \longrightarrow Ri^2 = -Ba\dot{x}i$

(EM) $\times\, \dot{x} \longrightarrow m\ddot{x}\dot{x} = -kx\dot{x} + iaB\dot{x}$

$\Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} = -kx\dot{x} - Ri^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\Bigg[\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2}_{E_m = E_c + E_p}\Bigg] = -Ri^2 < 0$

Cette dernière équation traduit le fait que l'énergie mécanique est dissipée sous forme d'effet Joule

En intégrant l'équation précédente entre $t=0$ et $t\to\infty$ qui correspond à l'arrêt des oscillations avec un retour à l'équilibre, avec $x=0$ et $\dot{x}=0$, on obtient :

$$\underbrace{E_m(t\to\infty)}_{\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t\to\infty) + \frac{1}{2}kx^2(t\to\infty) = 0} - \underbrace{E_m(t=0)}_{\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t=0) + \frac{1}{2}kx_0^2,\ \dot{x}(t=0) = 0} = -\int_{t=0}^{\infty} Ri^2\,dt$$

donc $\boxed{\int_{t=0}^{\infty} Ri^2\,dt = \frac{1}{2}kx_0^2}$

Ceci s'interprète par le fait que l'énergie dissipée par effet Joule correspond à toute l'énergie mécanique initialement présente, c'est-à-dire ici uniquement de l'énergie potentielle élastique.

<u>Remarque</u> : Essayons de retrouver ce résultat à partir de l'expression de $i(t)$:

D'après (EE) : $i(t) = -\frac{Ba\dot{x}}{R} = -\frac{Bax_0}{R}e^{-t/2\tau}\Big[-\omega_0\sin(\omega_0 t) - \underbrace{\frac{1}{2\tau}\cos(\omega_0 t)}_{\text{négligeable car } \tau \gg \frac{1}{\omega_0}}\Big]$

donc $i(t) \simeq \frac{Bax_0\omega_0}{R}e^{-t/2\tau}\sin(\omega_0 t)$

et $\int_0^\infty Ri^2\,dt = \frac{(Ba)^2x_0^2\omega_0^2}{R}\underbrace{\int_0^\infty e^{-t/\tau}\sin^2(\omega_0 t)\,dt}_{I = \tau/2 \text{ avec } \omega_0\tau \gg 1 \text{ (en utilisant la calculatrice)}}$.

donc $\int_0^\infty Ri^2\,dt = \frac{(Ba)^2x_0^2\omega_0^2}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{\cancel{(Ba)^2}x_0^2\,k\,\cancel{mR}}{2\cancel{Rm}\cancel{(Ba)^2}} = \frac{1}{2}kx_0^2$

on retrouve bien le même résultat, moyennant le calcul de l'intégrale I