Corrigé du DM n°10

1 Solénoïde en régime lentement variable

1) a) L'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{j} = \gamma\,\overrightarrow{E}$$

donc

$$\gamma\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Or, l'équation de Maxwell-Gauss indique que $\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \rho/\varepsilon_0$, ce qui conduit à :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\,\rho = 0}$$

On pose alors : $\boxed{\tau = \varepsilon_0/\gamma}$.

b) On en déduit que, en un point M du volume du métal :

$$\rho(M,t) = \rho(M,t=0)\,e^{-t/\tau} = \rho_0(M)\,e^{-t/\tau}$$

A.N. : $\tau = 1{,}5\times10^{-19}$ s.

Il s'ensuit que si la densité volumique de charges dans le cuivre était éventuellement non nulle à l'instant $t = 0$, elle tend très rapidement vers 0 (au bout de quelques τ).

c) Si $\rho = 0$ alors la densité de courant vérifie $\mathrm{div}\,\overrightarrow{j} = 0$: $\overrightarrow{j}$ est donc un *champ vectoriel à flux conservatif*. Cela a pour conséquence que :

$$\boxed{i_{S_1}(t) = i_{S_2}(t)}$$

2) a) La zone A.R.Q.S. est l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels on peut négliger le retard temporel PM/c dans l'expressions du champ électromagnétique en M. En introduisant $d_{\max}(M) = \max\limits_{P\in D_{cc}} PM$ distance entre point M et le point P de la distribution de charges et de courants le plus éloigné de M, ce retard temporel est négligeable si et seulement si :

$$d_{\max}(M)/c \ll \tau_{\text{car}}$$

où τ_{car} est le temps caractéristique d'évolution des charges et des courants de D_{cc}. Dans notre cas : $\tau_{\text{car}} = T = 2\pi/\omega$ et $d_{\max}(M) = b$. On doit donc avoir :

$$b \ll \frac{2\pi c}{\omega} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\omega \ll \frac{2\pi c}{b} = \omega_{\max}}$$

A.N. : $\omega_{\max} = 3{,}8\times10^{9}$ rad.s^{-1}, ce qui correspond à une fréquence $f_{\max} = 600$ MHz.

b) Dans le cadre de l'A.R.Q.S. on néglige le terme $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère (tout se passe comme si $c \longrightarrow +\infty$). On a donc :

$$\boxed{\text{div}\,\overrightarrow{E} = 0 \ \ (\text{car } \rho = 0) \quad \text{et} \quad \text{div}\,\overrightarrow{B} = 0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0} \ \ (\text{car } \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0} \text{ si } r < a)}$$

3) Le plan $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ est un plan d'antisymétrie des courants et des charges donc un plan d'antisymétrie de $\overrightarrow{E}$. Il en résulte que :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E(r,\theta,z,t)\,\overrightarrow{e_\theta}$$

De plus comme la distribution des charges et des courants est invariante par toute rotation autour de Oz (rigoureux) et toute translation le long de Oz (peu réaliste mais donne un comportement approché si on néglige les effets de bord ou si le point M reste très proche du milieu du solénoïde) on aura :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E(r,t)\,\overrightarrow{e_\theta}$$

De plus, si $M \in Oz$, alors comme tout plan contenant Oz est plan d'antisymétrie des charges et des courants contenant M, $\overrightarrow{E}(M,t)$ est orthogonal a chacun de ces plans ce qui ne laisse que la possibilité $\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{0}$.

4) a) à l'intérieur du solénoïde :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\mu_0 n \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{e_z} = \mu_0 n \omega I_m \sin(\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$$

or :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rE)}{\partial r}\,\overrightarrow{e_z} \implies \frac{\partial (rE)}{\partial r} = \mu_0 n \omega I_m\, r\, \sin(\omega t)$$

d'où sachant que $E(r=0,t) = 0$:

$$\boxed{E(r,t) = \frac{\mu_0 n \omega I_m}{2}\, r\, \sin(\omega t) \quad \text{si } r < a}$$

b) à l'extérieur du solénoïde : $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ donc

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rE)}{\partial r} = 0 \implies E(r,t) = \frac{C(t)}{r}$$

où $C(t)$ est une fonction qui ne dépend que du temps t. En l'absence de charges surfaciques il y a continuité de E en tout point de l'espace, donc en $r = a$:

$$\frac{C(t)}{a} = \frac{\mu_0 n \omega I_m}{2}\, a\, \sin(\omega t)$$

et donc :

$$\boxed{E(r,t) = \frac{\mu_0 n \omega I_m}{2}\,\frac{a^2}{r}\, \sin(\omega t) \quad \text{si } r > a}$$

5) Soit $\mathscr{C}_F$ une courbe fermée orientée et S la surface délimitée par $\mathscr{C}_F$ orientée par la règle de la main droite. Alors :

$$\oint_{\mathscr{C}_F} \overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\overrightarrow{B}/S)}{\mathrm{d}t}$$

On choisit pour $\mathscr{C}_F$ le cercle de rayon r et d'axe Oz. On a donc :

$$\oint_{\mathscr{C}_F} \overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = 2\pi r\, E(r,t)$$

De plus :

$$\Phi(\overrightarrow{B}/S) = \begin{cases} \mu_0 n I_m \cos(\omega t)\, \pi r^2 & \text{si} \quad r < a \\ \mu_0 n I_m \cos(\omega t)\, \pi a^2 & \text{si} \quad r > a \end{cases}$$

On a donc :

$$\boxed{E(r,t) = \frac{\mu_0 n \omega I_m}{2}\, r\, \sin(\omega t) \quad \text{si } r < a \quad \text{et} \quad E(r,t) = \frac{\mu_0 n \omega I_m}{2}\, \frac{a^2}{r}\, \sin(\omega t) \quad \text{si } r > a}$$

On retrouve bien les résultats précédents.

6) a) Les densités volumiques d'énergie s'écrivent :

$$u_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \left\| \overrightarrow{E} \right\|^2 \quad \text{et} \quad u_m = \frac{1}{2\mu_0} \left\| \overrightarrow{B} \right\|^2$$

d'où en faisant le rapport des amplitudes :

$$\frac{\text{amp}\, u_e}{\text{amp}\, u_m} = \frac{1}{c^2} \frac{(\mu_0 n I_m)^2 \omega^2}{(\mu_0 n I_m)^2} \frac{r^2}{4} \leqslant \left(\frac{\omega a}{2c}\right)^2 = \left(\frac{\omega b}{2c}\right)^2 \times \frac{1}{50^2} \ll \left(\frac{\pi}{50}\right)^2 = 4 \times 10^{-3}$$

l'avant-dernière relation venant des propriétés de la zone A.R.Q.S. Cela montre donc que la densité volumique d'énergie électrique u_e est négligeable devant la densité d'énergie magnétique u_m.

b) On a :

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} = \mu_0\, (n I_m)^2\, \frac{\omega r}{2} \cos(\omega t) \sin(\omega t)\, \overrightarrow{e_r}}$$

c) Comme $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$ pour $r < a$ et que u_e est négligeable devant u_m, l'identité locale de Poynting se réduit à :

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{\Pi} + \frac{\partial u_m}{\partial t} = 0$$

or :

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{\Pi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_0\, (n I_m)^2\, \frac{\omega r^2}{2} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right) = \mu_0\, (n I_m)^2\, \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

et

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0\, (n I_m)^2}{2} \cos^2(\omega t) \right) = -\, \mu_0\, (n I_m)^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

L'identité locale de Poynting est donc bien vérifiée dans le solénoïde.

7) On se place toujours dans la région de l'espace située dans le solénoïde ($r < a$).

a) On sait que :

$$\boxed{U_m(t) = \iiint_V u_m\, \mathrm{d}\tau = \frac{\mu_0\, (n I_m)^2}{2} \cos^2(\omega t)\, \pi a^2 h}$$

b) De même :

$$\Phi\left(\overrightarrow{\Pi}/S_F\right) = \iint_{S_{\text{lat}}} \Pi(a,t)\,\overrightarrow{e_r}.\mathrm{d}S\overrightarrow{e_r} = \mu_0\,(nI_m)^2\,\frac{\omega a}{2}\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,2\pi a\,h$$
$$= \mu_0\,(nI_m)^2\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,\pi a^2\,h$$

(le flux à travers les deux bases est nul).

c) Sachant que $U_e \ll U_m$ on doit montrer que :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}t} + \Phi\left(\overrightarrow{\Pi}/S_F\right) = 0}$$

ce qui est bien vérifié compte-tenu des expressions obtenues aux deux questions précédentes.

2 Émission d'un champ électromagnétique par un atome. D'après CCINP MP 2019 et 2022

Q1 L'énoncé nous donne déjà la forme de $\overrightarrow{E}$ à symétrie sphérique. Il suffit donc d'appliquer le théorème de Gauss avec comme surface de Gauss S_G la sphère de centre O et de rayon r :

$$\Phi(\overrightarrow{E}/S_G) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \text{donc} \quad 4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,\frac{4\pi}{3}\,r^3$$

et donc :

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,r \quad \text{avec} \quad \rho\,\frac{4\pi}{3}\,a^3 = e$$

On obtient donc :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r}{a^3}\,\overrightarrow{e_r}}$$

Q2 a) La force ressentie par l'électron est :

$$\overrightarrow{F} = -e\,\overrightarrow{E}(M) = -\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\,a^3}\,\overrightarrow{OM}$$

En la mettant sous la forme $\overrightarrow{F} = -\,m\,\omega_0^2\,\overrightarrow{OM}$ on identifie :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{e}{\sqrt{4\pi m\varepsilon_0 a^3}}}$$

Cette force est analogue à celle exercée par un ressort de raideur $k = m\omega_0^2$ et de longueur au repos $\ell_0 = 0$.

b) Application numérique : $\omega_0 = 1{,}6\times10^{16}$ rad.s^{-1} (ω_0 est bien une pulsation)

c) On cherche $E_P(r,\theta,\varphi)$ telle que $\overrightarrow{F} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p$. En coordonnées sphériques nous avons :

$$-m\omega_0^2\,r\,\overrightarrow{e_r} = -\,\frac{\partial E_P}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial E_P}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial E_P}{\partial \varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

d'où :

$$\frac{\partial E_P}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_P}{\partial \varphi} = 0$$

ce qui montre que $E_P = E_P(r)$ (ne dépend ni de θ, ni de φ). De plus :

$$\frac{\mathrm{d}E_P}{\mathrm{d}r} = m\omega_0^2 r \iff \boxed{E_P(r) = \frac{1}{2}\,m\omega_0^2\,r^2}$$

en prenant la constante d'intégration nulle puisque l'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante près.

Q3 Le principe fondamental de la dynamique s'écrit vectoriellement :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\,m\omega_0^2\,\overrightarrow{r}$$

d'où :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,\overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}}$$

On en déduit la solution (oscillateur harmonique) :

$$\boxed{\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{\lambda}\,\cos(\omega_0 t) + \overrightarrow{\mu}\,\sin(\omega_0 t)}$$

où $\overrightarrow{\lambda}$ et $\overrightarrow{\mu}$ sont deux vecteurs constants déterminés par les conditions initiales. Or, à $t = 0$:

$$\overrightarrow{r}(0) = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}(0) = \overrightarrow{v_0}$$

On en déduit que $\overrightarrow{\lambda} = \overrightarrow{0}$ et $\omega_0\,\overrightarrow{\mu} = \overrightarrow{v_0}$ d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{r}(t) = \frac{\overrightarrow{v_0}}{\omega_0}\,\sin(\omega_0 t)}$$

Q4 Le moment dipolaire de l'atome est donné par $\overrightarrow{p} = e\,\overrightarrow{NP} = e\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}\right)$. Or le barycentre P des charges positives est O et celui N des charges négatives est l'électron. Il s'ensuit que :

$$\overrightarrow{p}(t) = -e\,\overrightarrow{r}(t) = \frac{-e\,\overrightarrow{v_0}}{\omega_0}\,\sin(\omega_0 t) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\overrightarrow{p_m} = \frac{-e\,\overrightarrow{v_0}}{\omega_0}}$$

Q5 a) Soit a la taille caractéristique de la distribution de charges (taille de l'atome), $\lambda = cT_0$ où T_0 est la période temporelle des oscillations et $r = OM$. La zone de rayonnement est définie par :

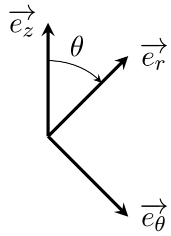
$$a \ll \lambda \ll r$$

L'inégalité $a \ll r$ est l'approximation dipolaire tandis que $a \ll \lambda$ est l'approximation non relativiste. En effet on a :

$$\frac{v_0}{\omega_0} < a \ll \lambda = c\,\frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{d'où} \quad v_0 \ll c$$

b) On a :

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t^2}(t) = e\omega_0\,\overrightarrow{v_0}\,\sin(\omega_0 t) = e\omega_0\,v_0\,\sin(\omega_0 t)\,\overrightarrow{e_z}$$



Or $\overrightarrow{e_z} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$. Il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi c}\,\frac{e\omega_0 v_0}{r}\sin\theta\,\sin(\omega_0 t - \omega_0 r/c)\,\overrightarrow{e_\varphi}}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{e\omega_0 v_0}{r}\sin\theta\,\sin(\omega_0 t - \omega_0 r/c)\,\overrightarrow{e_\theta}}$$

c) Le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\overrightarrow{\pi} = \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c}\,\frac{(e\omega_0 v_0)^2}{r^2}\sin^2\theta\sin^2(\omega_0 t - \omega_0 r/c)\,\overrightarrow{e_r}$$

et donc $\mathscr{P}_{\text{ray}}(r,t)$ est le flux de $\overrightarrow{\pi}$ à travers la sphère $S(O,r)$ de centre O et de rayon r :

$$\mathscr{P}_{\text{ray}}(r,t) = \oiint_{S(O,r)} \overrightarrow{\pi}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c}\,(e\omega_0 v_0)^2\sin^2(\omega_0 t - \omega_0 r/c)\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

donc :

$$\boxed{P_{\text{ray}}(r,t) = \frac{\mu_0}{(6\pi)c}\,(e\omega_0 v_0)^2\sin^2(\omega_0 t - \omega_0 r/c)}$$

puis :

$$\langle\mathscr{P}_{\text{ray}}\rangle_{T_0} = \frac{\mu_0}{6\pi c}\,(e\omega_0 v_0)^2\langle\sin^2(\omega_0 t - \omega_0 r/c)\rangle_{T_0}$$

c'est à dire :

$$\boxed{\langle\mathscr{P}_{\text{ray}}\rangle_{T_0} = \frac{\mu_0}{12\pi c}\,(e\omega_0 v_0)^2}$$

d) L'énergie mécanique de l'atome se confond avec celle de l'électron. D'après la question **Q3** :

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{v_0}\cos(\omega_0 t)$$

On a donc

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}m\omega_0^2\,\frac{v_0^2}{\omega_0^2}\sin^2(\omega_0 t)$$

d'où :

$$\boxed{\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2}$$

(On aurait pu s'en douter car le mouvement de l'électron est conservatif et que l'énergie mécanique initiale est purement sous forme d'énergie cinétique (électron en O à $t=0$) avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$).

On en déduit :

$$\langle\mathscr{P}_{\text{ray}}\rangle_{T_0} = \frac{\mu_0 e^2\omega_0^2}{6\pi mc}\,\mathscr{E}_m \quad \text{d'où} \quad \boxed{K = \frac{\mu_0 e^2\omega_0^2}{6\pi mc}}$$

Q6 a) L'hypothèse (H) se met sous la forme $\tau \gg 1/\omega_0$, c'est à dire $\tau \gg T_0$. Le temps caractéristique de décroissance de $\overrightarrow{p}$ est donc très grand devant la période d'oscillation.

b) On a :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = -\,\frac{\overrightarrow{p}(t)}{e} = -\,\frac{\overrightarrow{p_0}}{e}\,e^{-t/2\tau}\,\sin(\omega_0 t)}$$

et :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}(t) &= -\,\frac{\overrightarrow{p_0}}{e}\,\left\{-\,\frac{1}{2\tau}\sin(\omega_0 t) + \omega_0\cos(\omega_0 t)\right\}\,e^{-t/2\tau}\\
&= -\,\omega_0\,\frac{\overrightarrow{p_0}}{e}\,\left\{-\,\frac{1}{2\tau\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t)\right\}\,e^{-t/2\tau}\\
&\approx -\,\omega_0\,\frac{\overrightarrow{p_0}}{e}\,\cos(\omega_0 t)\,e^{-t/2\tau}
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a}(t) &= -\,\omega_0\,\frac{\overrightarrow{p_0}}{e}\,\left\{-\,\frac{1}{2\tau}\cos(\omega_0 t) - \omega_0\sin(\omega_0 t)\right\}\,e^{-t/2\tau}\\
&= \omega_0^2\,\frac{\overrightarrow{p_0}}{e}\,\left\{\frac{1}{2\tau\omega_0}\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)\right\}\,e^{-t/2\tau}\\
&\approx \omega_0^2\,\frac{\overrightarrow{p_0}}{e}\,\sin(\omega_0 t)\,e^{-t/2\tau}
\end{aligned}$$

c) Il vient :

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_m &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\|\overrightarrow{OM}\|^2\\
&= \frac{1}{2}m\,\frac{\|\overrightarrow{p_0}\|^2}{e^2}\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t)\,e^{-t/\tau} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\frac{\|\overrightarrow{p_0}\|^2}{e^2}\sin^2(\omega_0 t)\,e^{-t/\tau}\\
&= \frac{1}{2}m\,\frac{\|\overrightarrow{p_0}\|^2}{e^2}\,\omega_0^2\,e^{-t/\tau}
\end{aligned}$$

qui est bien de la forme demandée à condition de poser :

$$\boxed{\mathscr{E}(0) = \frac{1}{2}m\,\frac{p_0^2}{e^2}\,\omega_0^2}$$

Q7 a) On part de l'équation proposée par l'énoncé, en supposant que $\overrightarrow{p_0} = p_0\,\overrightarrow{e_z}$ (puisque la vitesse est colinéaire à $\overrightarrow{e_z}$) :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t} &= -\,\frac{1}{T_0}\int_t^{t+T_0}\frac{F_0\omega_0 p_0}{e}\cos^2(\omega_0 t)\,e^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t\\
&\approx -\,\frac{F_0\omega_0 p_0}{e}\,e^{-t/\tau}\,\frac{1}{T_0}\int_t^{t+T_0}\cos^2(\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\\
&= -\,\frac{F_0\omega_0 p_0}{2e}\,e^{-t/\tau}
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la question **Q6** c) :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t} = -\,\frac{1}{2}m\,\frac{p_0^2\omega_0^2}{e^2}\,\frac{1}{\tau}\,e^{-t/\tau}$$

d'où par identification des deux expressions :

$$\boxed{F_0 = \frac{mp_0\omega_0}{e\,\tau}}$$

b) Utilisons l'expression de $\overrightarrow{v}$ obtenue en **Q6** b). On obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{f_a}(t) = \frac{m}{\tau}\,\frac{p_0\omega_0}{e}\,\cos(\omega_0 t)\,e^{-t/2\tau}\,\overrightarrow{e_z} = -\,\frac{m}{\tau}\,\overrightarrow{v}}$$

Q8 On a (vectoriellement) :

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega_0^2\overrightarrow{r} - \frac{m}{\tau}\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} - e\,E_m\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$$

d'où, en multipliant par $-e$ et en introduisant $\overrightarrow{p} = -e\,\overrightarrow{r}$ et en divisant par m on obtient :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,\overrightarrow{p} = \frac{e^2E_m}{m}\,\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_z}}$$

Q9 Passons dans le domaine complexe et projetons sur $\overrightarrow{e_z}$. On trouve :

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau\right)\,\underline{p}_m\,e^{i\omega t} = \frac{e^2E_m}{m}\,e^{i\omega t}$$

d'où :

$$\boxed{\underline{p}_m = \frac{e^2E_m}{m}\,\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau}}$$

On a ensuite :

$$\underline{p}_m\,e^{i\omega t} = \frac{e^2E_m}{m}\left[\frac{\omega_0^2-\omega^2-i\omega/\tau}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega/\tau)^2}\,(\,\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\,)\right]$$

et, finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{p}(t) = \frac{e^2E_m}{m}\left[\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega/\tau)^2}\cos(\omega t) + \frac{\omega/\tau}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega/\tau)^2}\sin(\omega t)\right]\overrightarrow{e_z}}$$

Q10 a) Pour simplifier les calculs on va poser :

$$a(\omega) = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega/\tau)^2} \quad \text{et} \quad b(\omega) = \frac{\omega/\tau}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega/\tau)^2}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{p}(t) = \frac{e^2E_m}{m}\,[\,a(\omega)\cos(\omega t) + b(\omega)\sin(\omega t)\,]\,\overrightarrow{e_z}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\text{ray}}(r,t) &= \frac{\mu_0}{6\pi c}\left\|\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t^2}(t-r/c)\right\|^2 \\
&= \frac{\mu_0}{6\pi c}\left(\frac{e^2E_m}{m}\right)^2\omega^4\,\left[a^2(\omega)\cos^2(\omega t - \omega r/c)\right. \\
&+ 2a(\omega)b(\omega)\cos(\omega t - \omega r/c)\sin(\omega t - \omega r/c) \\
&\left.+ b^2(\omega)\sin^2(\omega t - \omega r/c)\,\right]
\end{aligned}$$

En prenant les valeurs moyennes, sachant que :

$$\langle\cos^2(\omega t - \omega r/c)\rangle_T = \langle\sin^2(\omega t - \omega r/c)\rangle_T = \frac{1}{2}$$

et

$$\langle\cos(\omega t - \omega r/c)\sin(\omega t - \omega r/c)\rangle_T = 0$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\langle\mathscr{P}_{\text{ray}}\rangle_T &= \frac{\mu_0}{12\pi c}\left(\frac{e^2 E_m}{m}\right)^2 \omega^4 \left[\, a^2(\omega) + b^2(\omega)\,\right] \\ &= \frac{\mu_0}{12\pi c}\left(\frac{e^2 E_m}{m}\right)^2 \frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}\end{aligned}$$

b) On calcule :

$$\mathscr{P}_0 = \frac{\mu_0}{12\pi c}\left(\frac{e^2 E_m}{m}\right)^2 (\omega_0\tau)^2$$

et on en déduit après un peu de calcul :

$$\boxed{\langle\mathscr{P}_{\text{ray}}\rangle_T = \frac{\mathscr{P}_0\, x^4}{(\tau\omega_0)^2\,(1-x^2)^2 + x^2}}$$

c)
- Si $x \ll 1$: $\langle\mathscr{P}_{\text{ray}}\rangle_T = \frac{\mathscr{P}_0\, x^4}{(\tau\omega_0)^2}$
- Si $x \gg 1$: $\langle\mathscr{P}_{\text{ray}}\rangle_T = \frac{\mathscr{P}_0}{(\tau\omega_0)^2}$
- Si $x = 0$: $\langle\mathscr{P}_{\text{ray}}\rangle_T = 0$
- Si $x \longrightarrow +\infty$: $\langle\mathscr{P}_{\text{ray}}\rangle_T = \frac{\mathscr{P}_0}{(\tau\omega_0)^2}$

d) Manifestement $\boxed{\omega_r = \omega_0}$ (minimum du dénominateur). Pour cette pulsation particulière $\langle\mathscr{P}_{\text{ray}}\rangle_T(\omega_r) = \mathscr{P}_0$. D'autre part, déterminons les deux pulsations ω_1 et ω_2 racines de :

$$\langle\mathscr{P}_{\text{ray}}\rangle_T(\omega) = \frac{\mathscr{P}_0}{2} \iff (\tau\omega_0)^2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 = 1$$

d'où :

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 = \pm\frac{1}{\tau\omega_0}$$

c'est à dire :

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau\omega_0}}} \approx \omega_0\left(1 - \frac{1}{2\tau\omega_0}\right) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{\tau\omega_0}}} \approx \omega_0\left(1 + \frac{1}{2\tau\omega_0}\right)$$

et donc :

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{\tau} \quad \text{et} \quad Q = \tau\omega_0 \gg 1}$$

Application numérique : $\Delta\omega = 10^9$ rad.s^{-1} et $Q = 1{,}6{\times}10^7$. On en déduit que le pic résonant autour de ω_0 est très étroit : la résonance est très aigüe.

Q11 a) Il s'agit du nombre de points des listes `X` et `Y`. C'est donc le nombre de points de la courbe représentative de la puissance moyenne.

b) La plage de valeurs est :

$$\omega_{\min} = a = \omega_0 - m \quad \text{et} \quad \omega_{\max} = b = \omega_0 + m$$

c) On peut visualiser la bande passante puisque $\Delta\omega = 1/\tau = 10^9$ rad.s^{-1}

d) Il s'agit de la liste des abscisses des points de la courbe.

Q12 a) Manifestement on a :

$$\boxed{h(\omega) = \frac{1}{1 + (\tau\omega_0)^2 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2} - \frac{1}{2}}$$

b) Dans l'algorithme de dichotomie, on suppose que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents et qu'il y a donc un point d'annulation qu'on suppose unique entre a et b (par le théorème des valeurs intermédiaires). Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe alors l'algorithme de dichotomie ne peut pas être utilisé et rien ne garantit que le fonction s'annule entre a et b.

c) Comme `eps` $= 10$, la précision est de 5 rad.s^{-1}.

min = 15 999 999 500 000 028
max = 16 000 000 500 000 020

d) $\Delta\omega = 10^9$ rad.s^{-1}. On en déduit $Q = \omega_0/\Delta\omega = 1{,}6\times10^7$.