DM n°3 (Pour le vendredi 4 octobre 2024)

1 Révisions atomistiques MPSI

Données générales:

Constante des gaz parfaits : R = 8,31 J.K^{-1}.mol^{-1}
Constante d'Avogadro : N_A = 6,02×10^{23} mol^{-1}
Constante de Planck : h = 6,63×10^{-34} J.s
Célérité de la lumière dans le vide : c = 3,0×10^{8} m.s^{-1}

1. L'élément oxygène possède le numéro atomique $Z = 8$. Indiquer sa configuration électronique dans son état fondamental, en énonçant précisément les règles utilisées.
2. Quel est son nombre d'électrons de valence ? Dans quelle colonne du tableau périodique est-il situé ? Dans quelle période ?

   L'électronégativité de O est assez élevée, ce qui lui donne un caractère oxydant relativement marqué. C'est pour cela que la plupart des éléments que l'on rencontre à l'état naturel se trouvent sous forme d'oxydes, comme le carbone C (Z = 6) dans la molécule CO_2 ou encore l'azote N (Z = 7) avec l'ion NO_3^-.

3. Donner en la justifiant la formule de Lewis de CO_2.
4. Dans l'ion NO_3^-, l'azote est l'atome central. Donner la formule de Lewis la plus stable de cet ion, c'est à dire celle qui contient le moins de charge formelles possibles.
5. Le plomb a un numéro atomique Z(Pb) = 82 et une masse molaire M(Pb) = 207,21 g.mol^{-1}.
   a) Justifier l'ordre de grandeur de la masse molaire du plomb par rapport à son numéro atomique.
   b) Le plomb possède 3 isotopes stables prépondérants ^{206}Pb, ^{207}Pb et ^{208}Pb. Sachant que l'abondance isotopique de ^{208}Pb vaut 52,4 %, en déduire celles des deux autres isotopes.
   c) Définir les énergies de première et de deuxième ionisation du plomb. Sachant que leurs valeurs respectives sont 715 kJ.mol^{-1} et 1450 kJ.mol^{-1}, si on soumet des atomes de plomb à un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 120$ nm, peut-on observer la première ionisation ? La deuxième ?

2 Mécanique - Forces centrales

Ce problème se propose d'établir quelques propriétés simples de l'Univers, telle qu'on les comprend actuellement, mais au moyen de modèles physiques simplifiés. À notre échelle, l'Univers est formé d'étoiles et de leurs planètes, regroupées en amas ou galaxies, ainsi que d'une certaine quantité de gaz interstellaire. Cependant, à plus vaste échelle, nous serons éventuellement amenés à traiter l'Univers comme un système fluide homogène.

Données :

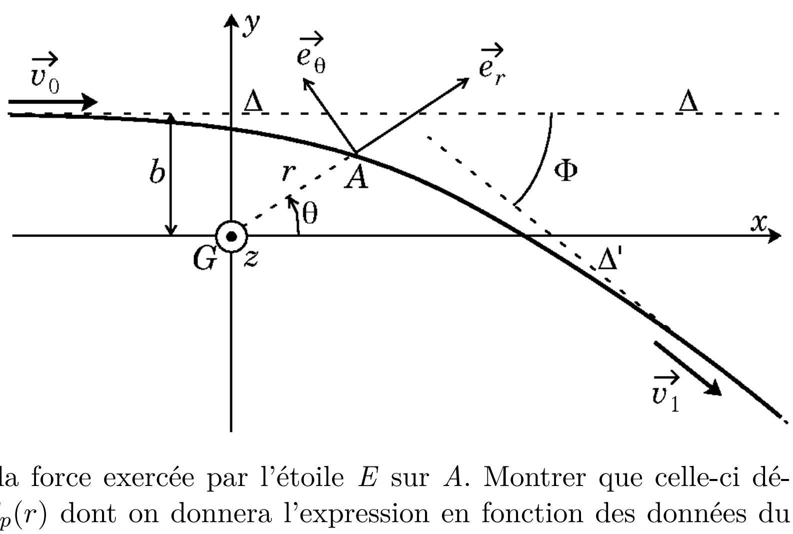
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8$ m.s^{-1}
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J.K^{-1}
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s
Durée d'une année	365, 25jours $= 3{,}16 \cdot 10^7$s
Masse du Soleil	$M = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg
Rayon du Soleil	$R = 6,95 \cdot 10^8$ m

Les quatre parties et de nombreuses questions peuvent être abordées de manière très largement indépendante.

Partie I - Déviation de la lumière par les étoiles

Cette partie étudie, dans un modèle non relativiste, la déviation d'une particule par une étoile E, considérée comme une répartition de masse à symétrie sphérique, de rayon R, de masse M et de centre G. La particule étudiée A est ponctuelle et de masse m. On considère le système formé de A et E comme isolé. Le référentiel d'étude est celui de l'étoile E, supposé galiléen. Il est muni d'un repère d'espace $(Gxyz)$.

On appellera Gxy le plan du mouvement ; on repère la position de A dans le plan Gxy par ses coordonnées polaires $r = GA$ et $\theta = (\vec{e}_x \cdot \vec{r})$. On notera $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ la base locale polaire correspondante (voir figure ci-contre).



I.B.1) Donner l'expression de la force exercée par l'étoile E sur A. Montrer que celle-ci dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$ dont on donnera l'expression en fonction des données du problème.

I.B.2) La particule A vient de l'infini avec une vitesse initiale $\vec{v_0} = v_0\,\vec{e_x}$. Montrer que sa trajectoire est une hyperbole.

I.B.3) Dans la suite du problème, on notera $\vec{\sigma^*}$ le moment cinétique de A par rapport au point G. Montrer que ce vecteur se conserve et en déduire que le mouvement est plan.

I.B.4) On pose : $\vec{\sigma^*}.\vec{e_z} = mC$.

Expliciter C en fonction de r et de $\dot{\theta} = d\theta/dt$, puis expliciter la dérivée $d\vec{v}/dt$ en fonction de la constante de gravitation, de M, $\dot{\theta}$ et de C. En déduire que le vecteur $\vec{e} = \alpha\,\vec{v} - \vec{e_\theta}$ est, pour un choix que l'on précisera de la constante α, une constante du mouvement.

I.C. Étude de la trajectoire

I.C.1) Lorsque la particule A est encore située à très grande distance de l'étoile E ($x_A \to -\infty$, voir la figure ci-dessus), sa vitesse $\vec{v_0}$ est colinéaire à Gx ; elle a pour norme v_0. L'asymptote Δ à cette trajectoire incidente passe à la distance b de G. Exprimer C en fonction de b et v_0 ; préciser en particulier le signe de C.

I.C.2) Lorsque la particule A s'est largement éloignée de l'étoile E, sa trajectoire est à nouveau une droite Δ' parcourue à la vitesse constante $\vec{v_1}$. Quelle est la norme de $\vec{v_1}$?

I.C.3) Exprimer, pour $t \to -\infty$ puis pour $t \to +\infty$, le vecteur $\vec{e}$ projeté sur la base $\vec{e_x}, \vec{e_y}$ en fonction de α, v_0 et de l'angle de déviation Φ entre les droites Δ et Δ'.

En déduire une expression de $\tan(\Phi/2)$ en fonction de v_0, C, $\mathscr{G}$ et M.

I.C.4) Lors de son mouvement, la particule A passe à un certain instant à une distance minimale d du centre de l'étoile E. À partir par exemple de deux lois de conservation, déterminer une équation du second degré dont $1/d$ est solution. En déduire que :

$$d = \frac{C^2}{\mathscr{G}M + \sqrt{\mathscr{G}^2M^2 + C^2v_0^2}}.$$

I.C.5) Quel est le sens de variation, pour v_0 fixé, de la fonction $\Phi(d)$ reliant l'angle de déviation et la distance minimale d'approche ? Commenter.

I.C.6) Lorsque cette distance minimale correspond à une trajectoire rasante ($d = R$), quelle est la valeur de la déviation Φ_0 ? On montrera que :

$$\tan\frac{\Phi_0}{2} = \frac{\mathscr{G}M}{v_0^2\sqrt{R(R+\rho)}}$$

où l'on exprimera ρ en fonction de $\mathscr{G}$, M, et v_0.

I.C.7) Déterminer numériquement ρ, appelé rayon de Schwarzschild, dans le cas du Soleil pour une particule de vitesse $v_0 \approx c$.

I.D - Déviation de la lumière par le Soleil

La lumière est ici traitée comme un faisceau de photons, particules dont la masse m n'a pas besoin d'être précisée dans la suite (même si on sait aujourd'hui qu'elle est nulle), et qu'on traitera dans le cadre de la mécanique non relativiste (même si cette approximation n'est pas légitime). Ces photons seront considérés comme soumis, comme une particule matérielle ordinaire, à l'interaction gravitationnelle avec l'étoile.

On admettra que, pour les photons passant à proximité du Soleil, $\rho \ll R$ (voir I.C.6).

I.D.1) Déterminer, en secondes d'arc, la déviation Φ_0 correspondant à un photon rasant le Soleil. On prendra $v_0 = c$.

I.D.2) Une expédition fut montée en mai 1919 pour observer cette déviation à l'occasion d'une éclipse de Soleil. La météo ne fut pas très bonne, pas plus donc que la qualité des observations ; toutefois, des mesures ultérieures menées lors de diverses éclipses de 1922 à 1999 confirmèrent progressivement une valeur mesurée expérimentalement $\Phi_e = 1,75''$.

Pourquoi la mesure doit-elle être menée lors d'une éclipse du Soleil ? Commenter la valeur de Φ_e.

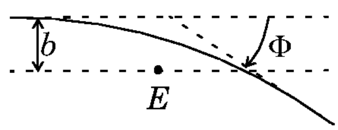
I.E - Effets de lentille gravitationnelle

La présence d'un astre massif E sur le trajet d'un faisceau de lumière parallèle provoque une déviation des rayons lumineux formant ce faisceau. L'angle de déviation Φ dépend de la distance b entre le rayon étudié et l'astre E, sous la forme

$$\Phi \approx \kappa \cdot \frac{\mathcal{G} M}{c^2 b}, \text{ où M est la masse de l'astre } E.$$

I.E.1) Par analyse dimensionnelle, préciser l'unité de la grandeur constante κ.

I.E.2) Montrer que la déviation gravitationnelle de la lumière par l'astre E se comporte, pour un rayon passant à la distance b de l'astre E (cf. figure ci-contre), comme une *lentille convergente* dont on exprimera la distance focale f' en fonction de b, κ, c, $\mathcal{G}$ et M.



On considère un rayon lumineux rasant la surface du Soleil ; b est donc voisin du rayon R du Soleil.

I.E.3) Déterminer f' dans ces conditions ; on prendra $\kappa = 2$ SI et on exprimera le résultat en années-lumière (une année-lumière est la distance parcourue par la lumière pendant une année).

I.E.4) L'observation des astres lointains et peu lumineux est parfois améliorée lorsque s'interpose, sur le trajet de la lumière entre ces astres et la Terre, une galaxie massive. Pouvez-vous expliquer ce fait ?