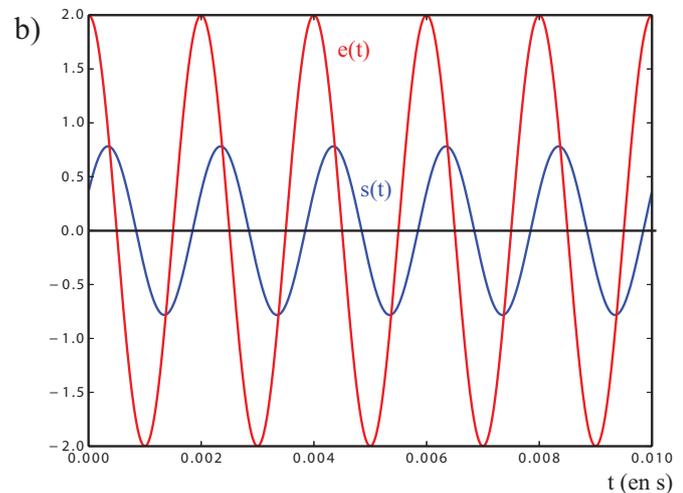
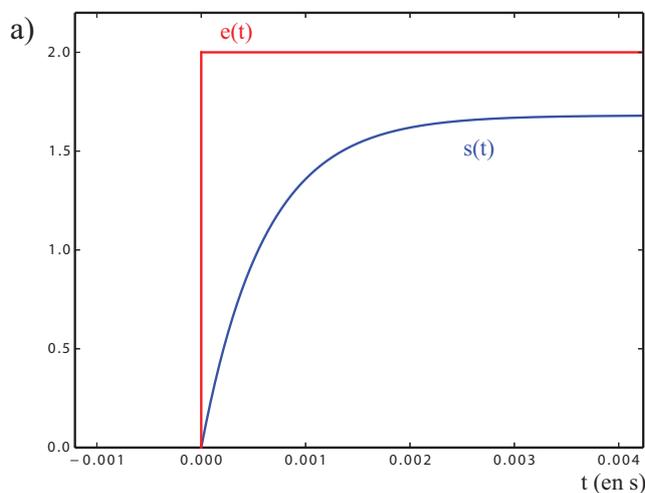


DS n°1 (CCP - e3a)
(Samedi 28 septembre 2024 - Durée 3h30)

1 Résolution de problème - Détermination d'une inductance

On considère l'association d'une bobine réelle et d'un résistor de résistance 50Ω , alimentée par un générateur de tension idéal délivrant une tension $e(t)$. On rappelle que le terme *générateur de tension idéal* correspond à un générateur de Thévenin de résistance nulle (on notera que les GBF utilisés en TP ont une résistance interne de 50Ω qui ne sera pas prise en considération ici).

On mesure la tension $s(t)$ aux bornes du résistor, ainsi que la tension $e(t)$. On obtient les graphes ci-dessous pour deux signaux d'entrée différents. Déterminer l'inductance de la bobine dont les caractéristiques sont données plus bas.



Caractéristiques de la bobine :

- Nombre de spires : 1000
- Charge permanente : 1,25 A
- Résistance : (env.) $9,5\Omega$
- Inductance sans noyau de fer : à déterminer !
- Épaisseur du fil : 0,7 mm (diamètre)

2 Un analyseur de Fourier très simplifié

2.1 Quelques généralités

1. Soit un système physique qui à une grandeur d'entrée fonction du temps $e(t)$ fait correspondre une grandeur de sortie fonction du temps $s(t)$. À quelle condition ce système peut-il être dit linéaire ?
2. On étudie expérimentalement le transfert de plusieurs systèmes (système 1, système 2, système 3) à l'aide d'un analyseur de spectre numérique; pour cela, on applique à leur entrée le même signal $e(t)$. On donne ci-dessous les spectres de Fourier du signal $e(t)$ (c'est-à-dire les fréquences qui composent ce signal) et ceux des signaux obtenus en sortie des trois systèmes.

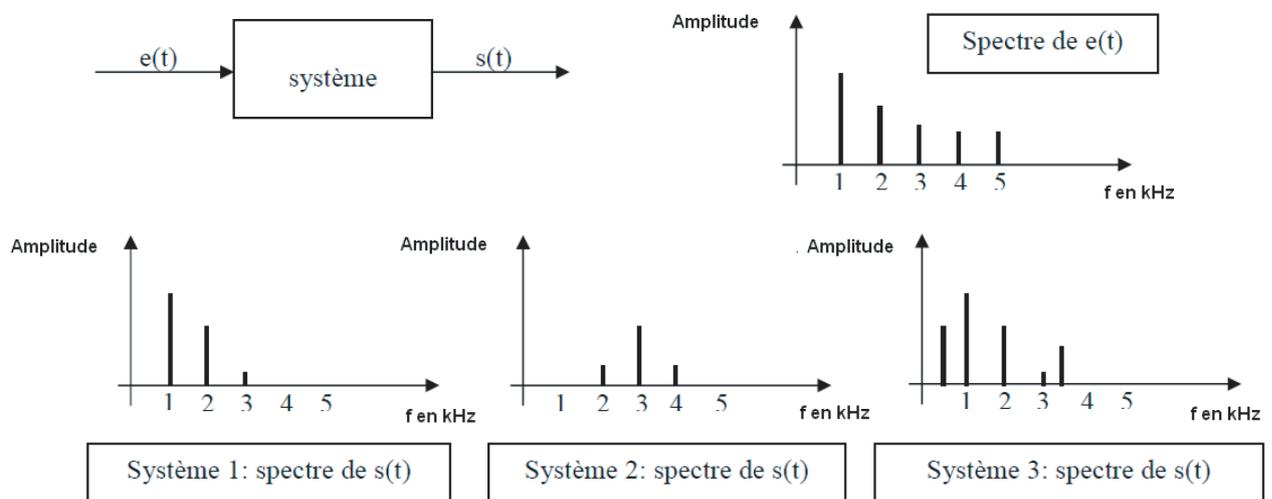


FIGURE 1 –

- (a) Le système 1 est-il linéaire ? Quel est son rôle ?
- (b) Qu'en est-il des systèmes 2 et 3 ?

2.2 Filtres peu sélectifs

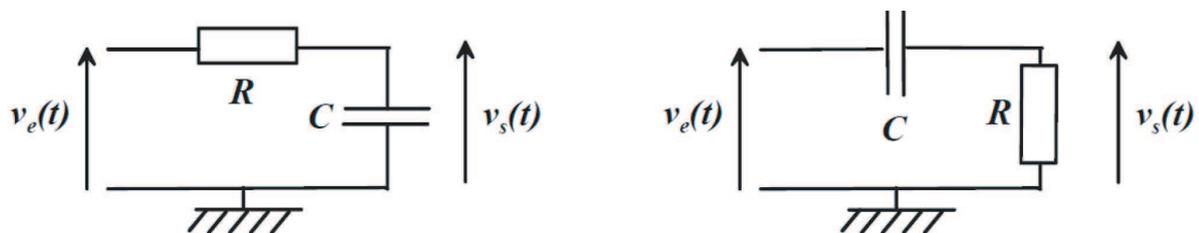


FIGURE 2 – (À gauche) Circuit RC. (À droite) Circuit CR.

1. Réaliser l'étude qualitative à haute et basse fréquence des montages RC et CR proposée sur la figure précédente.

2. Établir les fonctions de transfert des filtres RC et CR.
3. Tracer sommairement les diagrammes de Bode des filtres RC et CR.
4. (a) Les 3 documents de la figure suivante donnent les réponses d'un même filtre (Filtre 1) du 1er ordre à un signal triangulaire d'amplitude 1 V et de fréquence 50 Hz, puis 10 kHz. À quel type de filtre le Filtre 1 correspond-il? Évaluer l'ordre de grandeur de sa fréquence caractéristique.

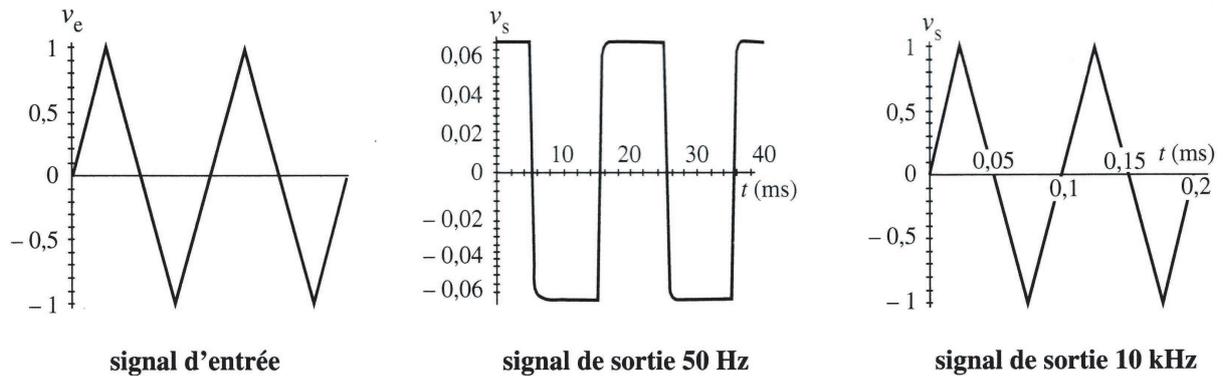


FIGURE 3 –

- (b) Les 3 documents de la figure 4 suivante donnent les réponses d'un second filtre (Filtre 2) du 1er ordre à un signal créneau d'amplitude 1V et de fréquence 100 Hz, puis 20 kHz. À quel type de filtre le Filtre 2 correspond-il? Évaluer l'ordre de grandeur de sa fréquence caractéristique.

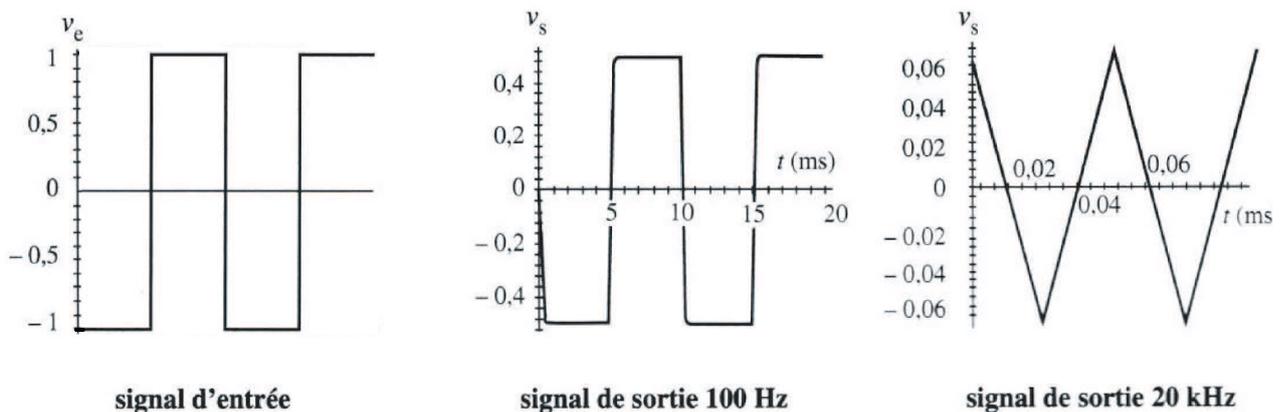


FIGURE 4 –

2.3 Filtre sélectif

On s'intéresse maintenant au filtre passif présenté dans la figure ci-dessous. On impose à l'entrée une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω .

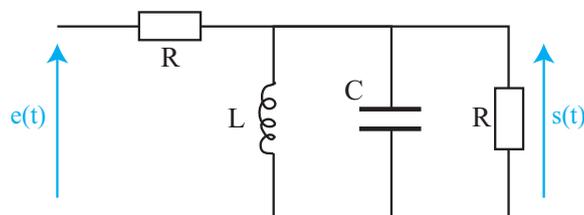


FIGURE 5 –

1. Représenter un montage expérimental qui permettrait de visualiser $e(t)$ et $s(t)$. On fera apparaître tous les appareils et connexions nécessaires.
2. Décrire un protocole expérimental qui permettrait d'étudier le comportement en fréquence du circuit.
3. On note $\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e}$ la fonction de transfert de ce filtre. Pourquoi étudie-t-on le transfert pour une tension sinusoïdale ?
4. Calculer sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ et la mettre sous forme canonique. On précisera les expressions de la pulsation caractéristique ω_0 , du facteur de qualité Q , et de la valeur maximale H_0 .
5. Définir puis **calculer** les pulsations de coupure du filtre en fonction de ω_0 et Q . En déduire la bande passante $\Delta\omega$.
6. Tracer l'allure du gain linéaire $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ et de la phase $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$.

2.4 Analyseur de Fourier élémentaire

On met à l'entrée du circuit précédent le signal $e(t)$ représenté ci-dessous (figure 6) avec $f = 1/T = 3,0$ kHz et $E = 10$ V.

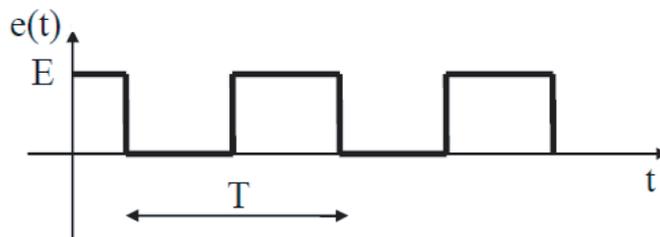


FIGURE 6 –

On montre que l'on peut décomposer le signal $e(t)$ sous la forme :

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \cos(2\pi ft) + \frac{2E}{3\pi} \cos(2\pi 3ft) + \frac{2E}{5\pi} \cos(2\pi 5ft) + \dots + \frac{2E}{(2k+1)\pi} \cos(2\pi(2k+1)ft)$$

1. Comment s'appellent les diverses fréquences qui apparaissent dans l'expression de $e(t)$?

2. Tracer l'allure du signal de sortie $s(t)$ si le circuit de la figure 5 est réglé pour $f_0 = 3,0$ kHz et $Q = 20$.
3. Calculer les valeurs de L et C correspondantes si on fixe $R = 1\text{ k}\Omega$? Quelles contraintes avait-on pour le choix de la résistance?
4. Comment pourrait-on utiliser le circuit de la figure 5 pour déterminer le spectre en fréquence de $e(t)$?

3 Mécanique

- Le référentiel terrestre est supposé galiléen.
- Masse volumique du plomb solide : $\rho = 11\,350 \text{ kg.m}^{-3}$.
- Masse volumique de l'air : $\rho_a = 1,23 \text{ kg.m}^{-3}$.

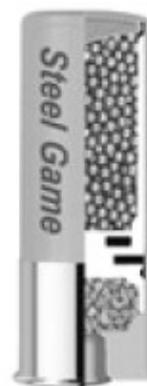
On suppose l'accélération de la pesanteur égale à $\vec{g} = -g\vec{k}$ avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Un fusil de chasse (arme à feu) ou de ball-trap permet d'envoyer à distance des projectiles au moyen de gaz produits par la combustion rapide et confinée d'un composé chimique. La déflagration va éjecter de la bouche du fusil les sphères de plomb qui étaient dans la cartouche avec une vitesse qui, en moyenne, vaut $v_0 = 380 \text{ m. s}^{-1}$, valeur à utiliser dans toutes les applications numériques ultérieures.

Les données suivantes sont fournies par un fabricant de cartouches de fusil de chasse (contenant de la grenaille de plomb ou de fer doux, dont les projectiles sont appelés "plombs" quelle que soit leur nature).

Document 1

La photographie ci-contre est celle d'une cartouche en partie dénudée. La vitesse de vol des billes de plomb dépend en premier lieu de leur taille. Avec une même vitesse de départ on obtient des différences considérables puisque, en raison de leur masse moins importante, les plombs de petit diamètre perdent plus de vitesse pour une même distance parcourue, face à la résistance de l'air à laquelle ils sont confrontés. La distance de sécurité de la grenaille de plomb, c'est-à-dire la distance au-delà de laquelle il n'y a plus danger pour les tiers, peut être déterminée à partir de la règle grossière suivante : diamètre des plombs $\times 100 =$ zone dangereuse en m. Exemple : pour des plombs de 3 mm : $3 \times 100 = 300 \text{ m}$.



Voilà la distance maximale possible avec l'angle de tir le plus favorable, à ne pas confondre avec la portée utile, qui est beaucoup plus faible. Dans le cas de la grenaille de fer doux, cette distance de sécurité est nettement plus faible en raison de la moindre densité des billes. Par contre, en cas d'agglutination, les billes agglutinées constituent des projectiles d'un poids supérieur qui peuvent être dangereux à des distances beaucoup plus grandes. Selon la taille des grains, la portée utile avec de la grenaille de plomb est de 35 à 40 m tout au plus. Au-delà, la dispersion est trop grande de sorte qu'il n'y a plus de couverture suffisante. La puissance de pénétration et la létalité des plombs diminuent avec l'augmentation de la distance de tir et ce, d'autant plus rapidement que les plombs sont plus petits.

Nous considérons la trajectoire d'un plomb de cartouche dont la dimension est typiquement de quelques millimètres et la masse inférieure au gramme. On néglige la poussée d'Archimède. Le projectile est a priori soumis à deux forces : son poids et la force de frottement fluide exercée par l'air qui, dans les cas considérés, est constituée de la traînée aérodynamique qui s'écrit :

$$\vec{F}_D = -\rho_a S C_D v \vec{v}$$

où v est la norme du vecteur vitesse \vec{v} du projectile, ρ_a est la masse volumique de l'air, $S = \pi R^2$ est la section de l'objet exposée au fluide dans la direction de l'écoulement et C_D est un

coefficient sans dimension appelé "coefficient de traînée". Pour les vitesses typiques étudiées (vitesses supersoniques situées entre 375 et 420 m/s) et pour les formes quasi-sphériques de projectiles, C_D est de l'ordre de 0,44.

Q1. Établir l'équation différentielle du mouvement du centre de masse du plomb de masse m .

On confondra par la suite le plomb avec une masse ponctuelle à laquelle on appliquera la force de traînée aérodynamique.

Premier modèle : trajectoire gravitaire

On considère le cas où la vitesse initiale du projectile est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air.

Q2. Montrer que cela correspondrait à une vitesse initiale v_0 , obéissant à l'inégalité :

$$v_0 \ll \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}}$$

Par la suite on notera $v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}}$

Q3. Projeter l'équation du mouvement sur la base cartésienne (figure 7). On note θ_0 l'angle de la vitesse initiale \vec{v}_0 avec le plan horizontal, à l'instant initial $t = 0$. On prend un repère tel que $\vec{v}_0 = v_0 (\cos \theta_0 \vec{i} + \sin \theta_0 \vec{j})$ et dont l'origine O est la position de la particule à l'instant initial.

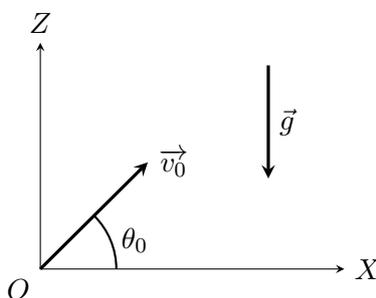


FIGURE 7 –

Q4. Établir les équations paramétriques de la vitesse et de la position en fonction du temps.

Q5. Quelle est la nature de cette trajectoire dite "gravitaire" ?

Q6. Montrer que la portée du tir, c'est-à-dire la distance atteinte par le projectile dans le plan horizontal de départ ($Z = 0$), vaut :

$$X_M = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

et que la hauteur maximale atteinte par le projectile vaut :

$$H_M = \frac{v_0^2 \sin^2(2\theta_0)}{2g}$$

Q7. Donner la valeur de l'angle θ_0 pour laquelle la portée est maximale.

Q8. Application numérique

La taille des plombs est identifiée par un numéro allant de 1 à 12 qui correspond à une régression arithmétique des diamètres de 0,25 mm par numéro. Une cartouche de n°8 possède des plombs plus petits qu'une de n° 4. Le tableau ci-dessous donne les rayons de quelques types de plombs et certains résultats numériques obtenus en utilisant les formules ci-dessus pour une vitesse initiale $v_0 = 380 \text{ m.s}^{-1}$.

n° du plomb	1	5	10
rayon (mm)	2	1,5	0,875
masse (g)	0,38	?	0,031
portée X_M (km)	?	?	?
hauteur H_M (km)	?	?	?
v_∞ (m.s^{-1})	33	?	22

Reporter ce tableau sur votre copie en le complétant par des valeurs à deux chiffres significatifs.

- Q9.** Comparer la portée maximale, obtenue pour un angle $\theta_0 = 45^\circ$, à la portée donnée dans le document 1 et conclure. Quel(s) autre(s) facteur(s) montre(nt) qu'il faut abandonner le modèle gravitaire ?

Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia

On vient de voir dans l'étude précédente que, pour les plombs de chasse, v_0 est très supérieure à v_∞ . Dans ce cas, la trajectoire diffère considérablement de la trajectoire gravitaire. On distingue 3 phases : une première phase à mouvement rectiligne, une deuxième phase à trajectoire asymétrique autour d'un sommet et une troisième phase de mouvement de chute verticale. Il s'agit d'une "trajectoire de Tartaglia", du nom du mathématicien balisticien Niccolò Tartaglia (XVI^e siècle).

Phase initiale : mouvement rectiligne ascendant

Soit OX' la direction de la droite trajectoire dans cette phase initiale. On note X' l'abscisse du point M sur cette droite qui fait un angle θ_0 avec OX et \vec{v} sa vitesse (figure 8).

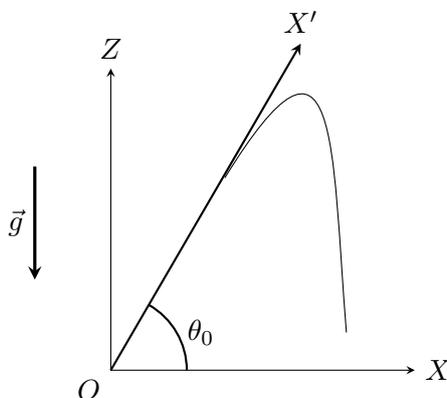


FIGURE 8 –

- Q10.** Montrer que le poids d'un plomb est alors négligeable devant la force de traînée.
Q11. Montrer que l'équation du mouvement dans la première phase se met sous la forme :

$$\frac{d\vec{v}}{dX'} = -\frac{g}{v_\infty^2} \vec{v} = -\frac{1}{D} \vec{v}$$

- Q12.** Quelle est la dimension de D ?
Q13. Établir l'expression de \vec{v} en fonction de X' . Que représente le paramètre D ?
Q14. On note d la distance que doit parcourir le plomb pour atteindre une vitesse $10 v_\infty$, v_u la vitesse atteinte quand le plomb a parcouru 40 m et E_c l'énergie cinétique correspondante. Le tableau ci-dessous donne pour trois numéros de plomb des résultats numériques obtenus en utilisant les formules ci-dessus pour une vitesse initiale $v_0 = 380 \text{ m.s}^{-1}$.

n° du plomb	1	5	10
D (m)	110	?	50
v_0/v_∞	11	?	17
$d(m)$	275	?	140
$v_u \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	270	?	170
$E_c \text{ (J)}$	13,5	?	0,45

Reporter ce tableau sur votre copie en le complétant par des valeurs à deux chiffres significatifs.

- Q15.** Comment définiriez-vous la portée utile d'un tir ?

On lit dans les journaux de chasse que le caractère mortel du tir vient en première approximation du fait que les plombs qui pénètrent dans le gibier communiquent à l'animal leur énergie cinétique créant ainsi une onde de choc fatale.

- Q16.** En supposant qu'il suffit de 2 plombs numéro 1 pour avoir un canard à son tableau de chasse, de combien de plombs 5 et 10 suffirait-il ? En déduire l'ordre de grandeur de la portée utile à l'aide de l'évaluation du paramètre D précédemment défini.
Q17. Comparer aux valeurs données dans le document 1. Pourquoi faut-il prendre des billes plus grosses en fer doux, sachant qu'il s'agit d'un acier de masse volumique $\rho' = 7\,600 \text{ kg.m}^{-3}$? Quel est le danger lié à l'agglutination de la grenaille ?

Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant

On note que cette phase est quasiment verticale.

- Q18.** À quoi correspond-elle ?
Q19. Montrer que la vitesse limite atteinte pendant cette dernière phase vaut :

$$\vec{v}_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}} (-\vec{k})$$

Expliquer le terme de "mur aérodynamique" utilisé pour qualifier cette dernière phase.

Deuxième phase : la phase intermédiaire

Dans cette phase, la vitesse a diminué.

Q20. Pourquoi qualifie-t-on cette phase de "phase gravitaire" ?

On peut établir par un calcul formel, à partir de l'équation du mouvement, l'expression approchée de la portée maximale du projectile pour ce type de trajectoire :

$$X_M \approx \frac{D \cos \theta_0}{2} \ln \left[1 + 4 \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \sin \theta_0 \right] = H \cotan \theta_0$$

Q21. Évaluer numériquement les portées maximales des numéros 1, 5 et 10 de plombs, pour $\theta_0 = 16^\circ$. Comparer aux valeurs données dans le document 1. Le même calcul donne également l'expression approchée de l'angle initial permettant d'optimiser la portée maximale X_M .

$$\theta_{\max} \approx \arctan \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{2} (v_0/v_\infty)^2}{[1 + 2\sqrt{2} (v_0/v_\infty)^2] \ln[1 + 2\sqrt{2} (v_0/v_\infty)^2]}} \right)$$

Q22. La figure 9 donne la courbe θ_{\max} (en degrés) fonction de $\log(v_0/v_\infty)^2$. Identifier la valeur de θ_{\max} pour les trois numéros de plomb considérés.

Pour calculer plus précisément la portée utile du tir de grenaille de plomb, on intègre numériquement l'équation du mouvement. La figure 10 donne les trajectoires des plombs n° 1, 5 et 10 de vitesse initiale $v_0 = 380 \text{ m.s}^{-1}$, pour l'angle θ_0 optimisant la portée maximale. Les valeurs des coordonnées et des rayons sont en mètres.

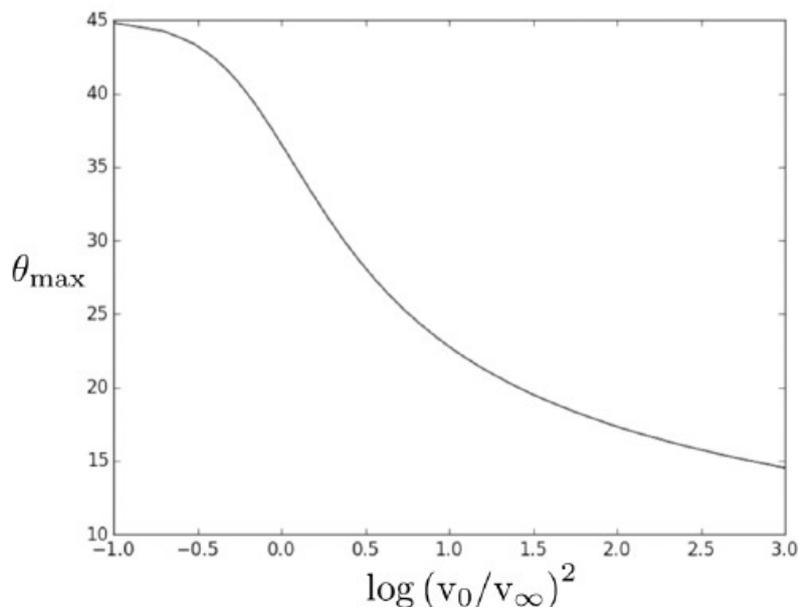


FIGURE 9 – Angle initial optimal.

Q23. Évaluer les portées maximales pour chaque calibre et comparer aux données du document 1.

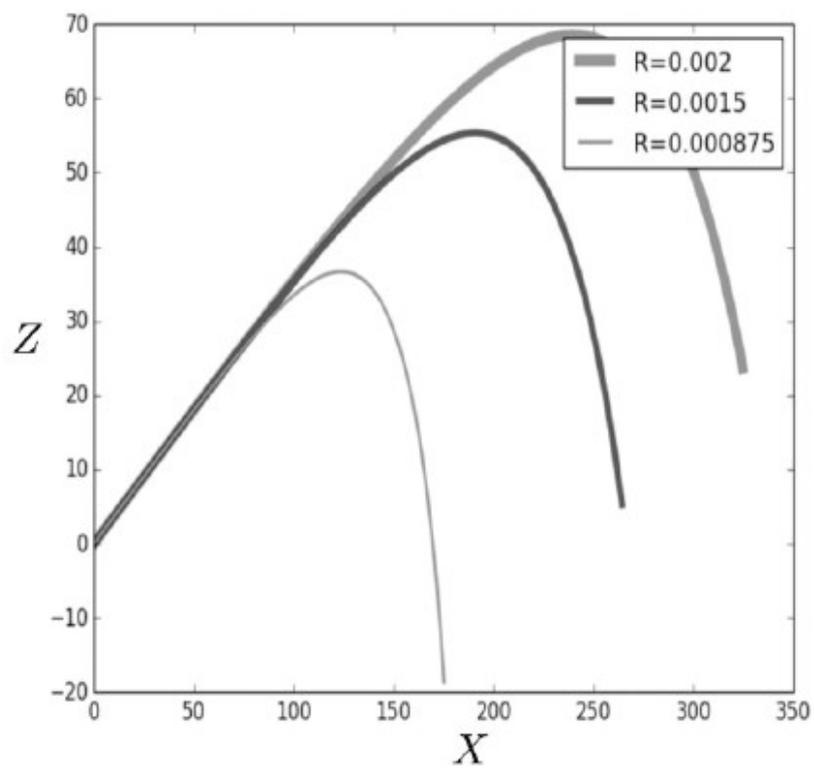


FIGURE 10 – Trajectoire de différents plombs.