## PARTIE I – Trajectoires des plombs d'une cartouche

### Equation du mouvement

1) Le Principe Fondamental de la Dynamique (PDF) appliqué au plomb donne :

$$\vec{F}_D + m\vec{g} = m\vec{a}_G = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

soit l'équation différentielle demandée :

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\rho_a S c_D}{2m} v\,\vec{v} = \vec{g}}$$

### Premier modèle : trajectoire gravitaire

2) La force de frottement initiale est négligeable devant la force de pesanteur ssi :

$$\frac{\rho_a S c_D}{2m} {v_0}^2 \ll g \Leftrightarrow \boxed{v_0 \ll \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 c_D}}}$$

3) La force de frottement est négligeable devant la fore de pesanteur donc le PFD devient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$$

qui, projeté sur $OX$ et $OZ$, donne :

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{X} = 0 \\ m\ddot{Z} = -mg \end{cases}}$$

4) On intègre les équations précédentes une première fois :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{X} = v_0\cos(\theta_0) \\ \dot{Z} = -gt + v_0\sin(\theta_0) \end{cases}}$$

Puis une seconde fois :

$$\boxed{\begin{cases} X = v_0\cos(\theta_0)t \\ Z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\theta_0)t \end{cases}}$$

5) La trajectoire est une parabole d'équation :

$$Z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{X}{v_0\cos(\theta_0)}\right)^2 + X\tan(\theta_0)$$

6) La portée du tir est la valeur $X_M \neq 0$ de $X$ telle que $Z = 0$ :

$$Z = 0 \text{ et } X \neq 0 \Leftrightarrow X = \frac{2v_0^2}{g}\cos^2(\theta_0)\tan(\theta_0) = \boxed{\frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta_0) = X_M}$$

La hauteur maximale du tir correspond à l'altitude $Z$ quand $\dot{Z} = 0$ soit pour $t_1 = \frac{v_0\sin(\theta_0)}{g}$, donc

$$H_M = Z(t_1) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin(\theta_0)}{g}\right)^2 + v_0\sin(\theta_0)\frac{v_0\sin(\theta_0)}{g}$$

$$\boxed{H_M = \frac{v_0^2\sin^2(\theta_0)}{2g}}$$

7) L'angle initial pour lequel la portée est maximale est la valeur de $\theta_0$ pour laquelle $\frac{dX_M}{d\theta_0} = 0$ ; soit :

$$\frac{dX_M}{d\theta_0} = 2\frac{v_0^2}{g}\cos(2\theta_0) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\theta_0) = 0 \Leftrightarrow 2\theta_0 = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Et comme $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la solution est : $\boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{4}}$.

8) Une régression arithmétique pour les **diamètres** de 0,25 mm par numéro en partant de $R_1 = 2$ mm donne : $R_k = 2 - (k-1)\times 0{,}125$ (en mm)

On complète le tableau en prenant $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ; $v_0 = 380$ m/s ; $m = \rho\times\frac{4}{3}\pi R^3$ et $v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a\pi R^2 c_D}} = \sqrt{\frac{8g\rho}{3\rho_a c_D}R}$.

| n° | 1 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|
| Rayon $R$ (mm) | 2,0 | 1,5 | 0,875 |
| Masse $m$ (g) | 0,38 | 0,16 | 0,031 |
| Portée $X_M$ (km) | 15 | 15 | 15 |
| Hauteur $H_M$ (km) | 3,7 | 3,7 | 3,7 |
| $v_\infty$ (m/s) | 33 | 29 | 22 |

9) Les plombs n°5 ont un diamètre de $3\ \mathrm{mm}$, donc d'après le document 1, la distance maximale possible avec l'angle de tir le plus favorable est de $300\ \mathrm{m}$, alors qu'avec notre modèle on obtient (pour $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$) une portée maximale de $15\ \mathrm{km}$, soit **50 fois plus** !
L'autre facteur qui montre qu'il faut abandonner ce modèle est la valeur de $v_\infty$ qui est de l'ordre de $\frac{v_0}{10}$ et donc $v_0 \ll v_\infty$ **n'est pas vérifié** !

**Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia**

10) Comme $v_0 \gg v_\infty$ , on a $\frac{\rho_a S c_D}{2} {v_0}^2 \gg mg$ : **la force de pesanteur est négligeable devant la force de traînée**.

11) Le PDF donne donc : $\vec{F}_D = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

soit : $-\frac{\rho_a S c_D}{2} v\,\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

Dans cette première phase, $\vec{v}$ et $\frac{d\vec{v}}{dt}$ sont tous deux colinéaires à $X'$ et $v = \frac{dX'}{dt}$, donc :

$$-\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\rho_a S c_D}{2m} v\,\vec{v} = \frac{g}{v_\infty^2} v\,\vec{v} = \frac{g}{v_\infty^2}\frac{dX'}{dt}\vec{v}$$

On pose : $\boxed{\frac{g}{v_\infty^2} = \frac{1}{D}}$ (pour que $D>0$ comme dans le tableau 2, Q14)

Alors : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dX'}\frac{dX'}{dt} = -\frac{1}{D}\frac{dX'}{dt}\vec{v} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dX'} = -\frac{1}{D}\vec{v}}$

12) En faisant une analyse dimensionnelle de cette dernière relation, on détermine immédiatement que **D a la dimension d'une longueur**.

13) On projette la relation Q11 sur $OX'$ et on l'intègre :

$$\frac{dv}{dX'} = -\frac{1}{D}v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dX'}{D} \Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{X'}{D} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-\frac{X'}{D}}}$$

**D est la distance pour laquelle la vitesse est divisée par $e$**.

14) On complète le tableau avec : $\mathbf{d = D \ln\left(\frac{v_0}{10\,v_\infty}\right)}$ ;

$v_u = v_0 e^{-\frac{X_1}{D}}$ avec $X_1 = 40\ \mathrm{m}$ et $E_c = \frac{1}{2} m v_u^2$.

| n° | 1 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|
| D (m) | 110 | 86 | 50 |
| $v_0/v_\infty$ | 11 | 13 | 17 |
| d (m) | 15,5 | 23 | 27 |
| $v_u$ (m/s) | 270 | 240 | 170 |
| $E_c$ (J) | 13,5 | 4,6 | 0,45 |

Rem : Attention aux valeurs de $d$ de l'énoncé qui sont fausses !

15) La portée utile d'un tir pourrait être définie par **la distance maximale à laquelle on peut envoyer le plomb dans la direction $X'$**.

16) On suppose qu'il faut comparer les énergies cinétiques qu'on nous a fait calculer, soit celles à $40\ \mathrm{m}$ :

$\frac{E_{c5}}{E_{c1}} = 0{,}34 \sim \frac{1}{3}$ donc il faut $3\times 2$ = **6 plombs n°5**

$\frac{E_{c10}}{E_{c1}} = 0{,}033 \sim \frac{1}{30}$ donc il faut $30\times 2$ = **60 plombs n°10**

Comme la première phase s'arrête quand la vitesse n'est plus très grande devant $v_\infty$, soit environ pour $v \simeq 10\times v_\infty$, donc pour $X'=d$, on peut dire alors que **la portée utile est** :

$$\boxed{\mathbf{d = D\ln\left(\frac{v_0}{10\,v_\infty}\right)}}$$

17) Dans le document 1, on parle d'une portée utile de $35$ à $40\ \mathrm{m}$ tout au plus, alors qu'avec notre modèle on obtient une portée utile de $d=15$ à $30\ \mathrm{m}$ environ (valeurs rectifiées), **ce qui est cohérent**.

Si les billes sont en fer doux, la masse volumique $\rho$ est plus faible, donc pour le même rayon $R$, $m$ et $v_\infty$ seraient plus petits, donc $D$ aussi, et $v_u$ et

$E_c$ aussi. L'augmentation de $R$ permet de compenser cet effet afin de conserver la même énergie cinétique $E_c$.

Si les plombs s'agglutinent, la masse et le diamètre augmentent, donc la portée utile aussi : **La distance de sécurité à respecter n'est pas celle indiquée si la grenaille s'agglutine, elle est en réalité plus grande : danger !**

**Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant**

18) Cette phase correspond à un **mouvement de chute avec résistance de l'air** puisqu'on tient compte de la force de frottement de l'air (dans la chute libre, la seule force qui s'exerce sur l'objet est son poids).

19) Le PFD donne : $\vec{F}_D + m\vec{g} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

On pose $\vec{v} = -v\vec{k}$ puisque le mouvement est vers le bas.

$$+\frac{\rho_a S c_D}{2} v^2\,\vec{k} - mg\vec{k} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = -m\frac{dv}{dt}\vec{k}$$

$$\frac{\rho_a S c_D}{2} v^2 - mg = -m\frac{dv}{dt}$$

d'où l'équation différentielle : $\frac{dv}{dt} + \frac{\rho_a S c_D}{2m} v^2 = g$

Quand la vitesse limite est atteinte, $\frac{dv}{dt} = 0$, et donc :

$$\frac{\rho_a S c_D}{2m} v_\infty^2 = g \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\mathbf{v}}_\infty = -\sqrt{\frac{\mathbf{2mg}}{\rho_a \mathbf{Sc_D}}}\,\vec{k}}$$

On parle de « mur aérodynamique » car la **vitesse de cette phase est limitée par la force aérodynamique** : force de frottement fluide.

**Deuxième phase : la phase intermédiaire**

20) On suppose que **la vitesse a suffisamment diminué pour qu'elle soit négligeable devant $v_\infty$**, alors la première modélisation s'applique et on est bien **dans la phase gravitaire**.

21) Pour $\theta_0 = 16°$ on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{X_M = 264\ m} & \text{pour le plomb } \mathbf{n°1} \\ \mathbf{X_M = 217\ m} & \text{pour le plomb } \mathbf{n°5} \\ \mathbf{X_M = 139\ m} & \text{pour le plomb } \mathbf{n°10} \end{cases}$$

A comparer avec la formule : diamètre du plomb × 100 (doc 1) :

$$\begin{cases} \mathbf{X_M = 400\ m} & \text{pour le plomb } \mathbf{n°1} \\ \mathbf{X_M = 300\ m} & \text{pour le plomb } \mathbf{n°5} \\ \mathbf{X_M = 175\ m} & \text{pour le plomb } \mathbf{n°10} \end{cases}$$

Le document 1 donne des valeurs supérieures à celles du calcul théorique, en particulier pour les grands diamètres, mais c'est le bon ordre de grandeur.
Cependant, le calcul théorique est basé sur une approximation et est calculé pour un angle ($16°$) qui n'est pas forcément celui donnant la portée maximale.
Quant à la formule du document, elle est qualifiée de « grossière » et pour des raisons de sécurité, il vaut mieux qu'elle donne une valeur supérieure à la valeur réelle.

22) En utilisant les valeurs obtenues dans le tableau 2, on calcule $\log\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)$ pour les 3 numéros de plomb considérés et on relève la valeur correspondante de $\theta_{max}$. On trouve :

| n° | $\log\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)$ | $\theta_{max}$ |
|---|---|---|
| **1** | **2,0** | **18°** |
| **5** | **2,2** | **17°** |
| **10** | **2,5** | **16°** |

23) En prolongeant éventuellement les courbes, on lit la valeur de l'abscisse du point tel que $Z=0$ ; c'est la portée maximale $X_M$ :

$$\begin{cases} \mathbf{X_M = 345\ m} & \text{pour le plomb } \mathbf{n°1} \\ \mathbf{X_M = 265\ m} & \text{pour le plomb } \mathbf{n°5} \\ \mathbf{X_M = 170\ m} & \text{pour le plomb } \mathbf{n°10} \end{cases}$$

Ces valeurs sont plus proches de celles du document 1 qu'à la question Q21, toujours légèrement inférieure comme il se doit (cf. fin Q21).