

DS 1bis (Centrale - Mines)
(Samedi 28 septembre 2024 - Durée 3h15)

1 Oscillateurs mécaniques

Le Millennium Bridge

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaires pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés.

L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires \hat{u}_x ou d'une flèche dans le cas général \vec{v} .

À l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les grandeurs complexes sont soulignées : $\underline{z} \in \mathbb{C}$. Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.



I. — Oscillateur simple

Un oscillateur est constitué d'une masse m dont le centre d'inertie G est repéré par la position x dans le référentiel galiléen (O, \hat{u}_x) – voir figure 1. L'origine O se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité α , exerçant sur m une force de frottement $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \hat{u}_x$, avec $\alpha > 0$. À tout instant t , on assimile la distance OG à la longueur $\ell(t)$ du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \hat{u}_x$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

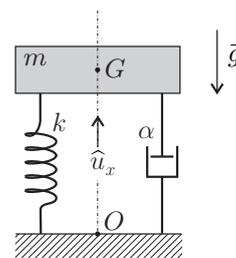


FIG. 1 – Oscillateur

□ 1 — En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$ dans laquelle on a introduit la fonction $X(t) = x(t) - \tilde{x}$ où \tilde{x} est une constante que l'on déterminera en fonction de g , ω_0 et ℓ_0 . On précisera les expressions et significations de ω_0 et ξ .

□ 2 — Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles $X(0) = X_0 \neq 0$ et $\dot{X}(0) = V_0 \neq 0$. Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de ω_0 , ξ , X_0 , V_0 et t) pour les cas $\xi = 0$ et $0 < \xi < 1$ et préciser leur comportement. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit $\vec{F}_v = \beta \dot{x} \hat{u}_x$, avec $\beta > 0$. Quelle peut-être la conséquence de ce phénomène ?

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage) $F(t)$ de l'oscillateur étudié lors des deux premières questions. Nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne.

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.

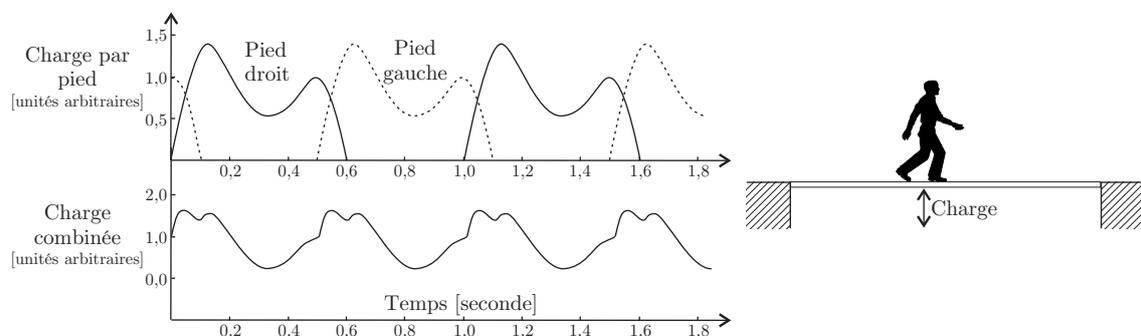


FIGURE 2 – Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton.

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi ft)$.

Le vecteur \vec{F}_0 correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence f correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que $\vec{F}_1 = 0,4 \vec{F}_0$. Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme $-\hat{u}_x$.

On note $F_0 = \|\vec{F}_0\|$ le module de la force statique, $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ la réponse en déplacement de l'oscillateur et $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$ sa représentation complexe.

□ **3** — Que devient l'équation de l'oscillateur en Y sous le forçage piéton ? Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$, rapport de la représentation complexe de la réponse en déplacement \underline{Y} sur la représentation complexe de l'excitation $\underline{E} = \frac{1}{m} \underline{F}_1$. On exprimera $\underline{H} = \underline{Y}/\underline{E}$ en fonction de ξ , ω_0 et $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$.

□ **4** — Sous quelle condition portant sur ξ , un phénomène de résonance peut-il se produire ? Pour quelle pulsation ω_r obtient-on alors ce phénomène ? Exprimer le gain en amplitude à la résonance $|\underline{H}|(\omega_r)$ dans la limite $\xi^2 \ll 1$.

□ **5** — En se plaçant dans l'hypothèse $\xi^2 \ll 1$ et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure 3, déterminer un ordre de grandeur de ξ ainsi que la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur modélisant le Millennium Bridge avant la mise en place des amortisseurs harmoniques.

□ **6** — Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.

□ **7** — Quel(s) type(s) de capteur(s) est-il envisageable d'utiliser pour obtenir un signal électrique issu de la marche d'un piéton ?

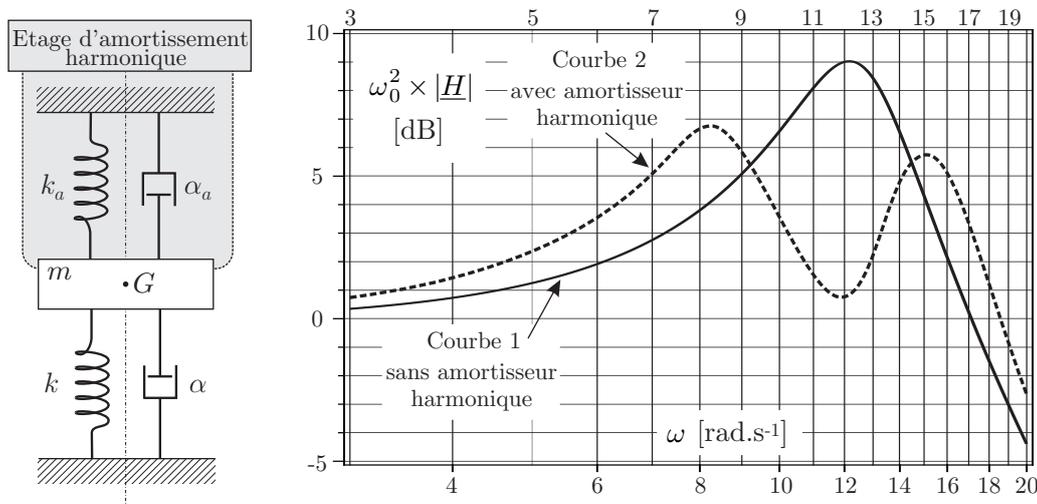


FIGURE 3 – Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliqué au modèle du Millennium Bridge.

L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée représentée sur la figure 2. On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en $N = 300$ points équidistants sur un intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$. Les différents spectres obtenus sont rassemblés sur la figure 4.

□ 8 — Analyser et interpréter aussi précisément que possible ces différents spectres. Sont-ils tous exploitables? Lequel vous paraît le plus pertinent? En déduire la (ou les) fréquence(s) caractéristique(s) de la marche étudiée. Était-ce qualitativement prévisible?

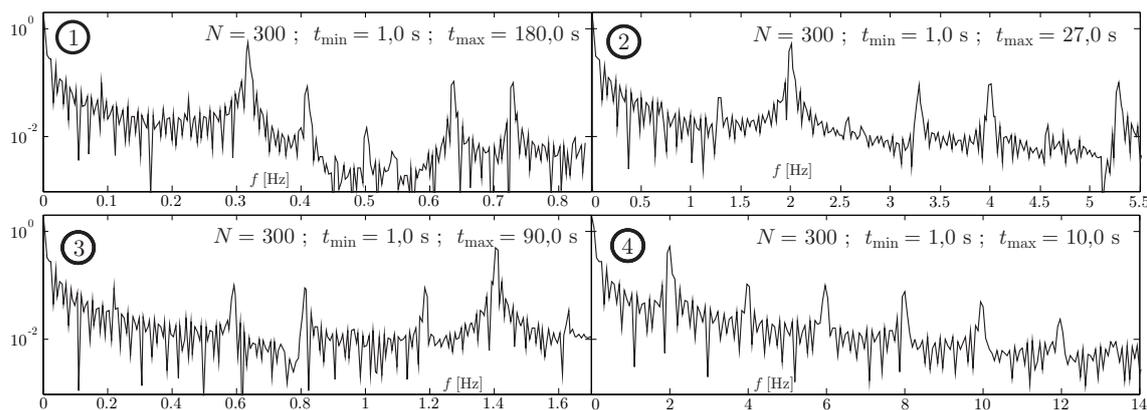


FIGURE 4 – Spectres des signaux correspondants à la marche d'un piéton

□ 9 — À partir d'une exploitation des données fournies dans le sujet, expliquer l'origine du problème concernant le Millennium Bridge et justifier que l'installation d'amortisseurs harmoniques ait pu le résoudre.

FIN DE LA PARTIE I

2 Filtrage d'un signal

Afin d'analyser les composantes fréquentielles d'un signal sonore (analyse des phonèmes du langage par exemple), on utilise un transducteur (microphone) qui convertit le signal en une tension v_e puis un filtre passe-bande qui extrait les composantes sinusoïdales de v_e de fréquences voisines d'une fréquence f_0 donnée.

On note v_s la tension de sortie du filtre. Le filtre est un circuit linéaire dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} .$$

On se propose de déterminer les caractéristiques H_0 , Q et ω_0 du filtre à partir des oscillogrammes obtenus en régime périodique pour une tension d'entrée v_e rectangulaire pour deux valeurs de fréquences.

On rappelle la décomposition en série de Fourier de $v_e(t)$ dans le cas où $v_e(t)$ est périodique de période T avec :

- pour $0 \leq t < T/2$: $v_e(t) = V_0$
- pour $T/2 \leq t < T$: $v_e(t) = 0$:

$$v_e(t) = V_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_1 t) \right) \text{ avec } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

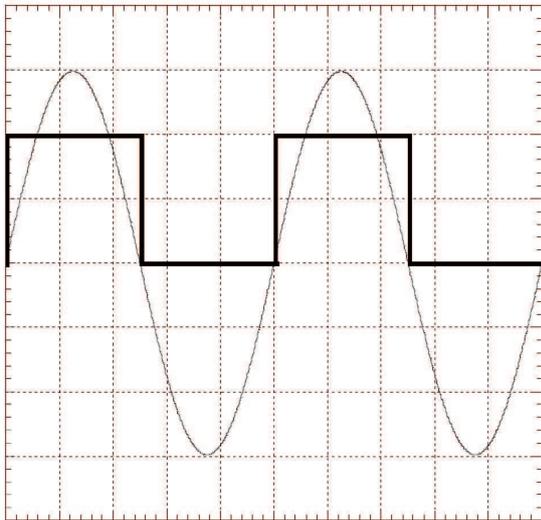
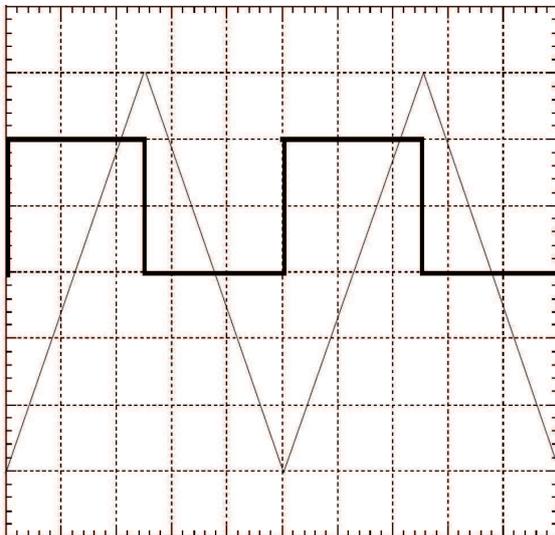
Première expérience (oscillogramme de la figure 7):

figure 7

- voies 1 et 2 en position DC
- base de temps : $50 \mu\text{s}$ par carreau
- sensibilités :
 - voie 1 (en gras) : $0,5 \text{ V}$ par carreau
 - voie 2 : 2 V par carreau

Dans cette expérience :

- la tension v_s obtenue est quasi-sinusoïdale
- si on augmente la fréquence de v_e par rapport à la valeur correspondant à cet oscillogramme, on constate que l'amplitude de v_s diminue
- si, par rapport à cette même fréquence, on diminue légèrement la fréquence de v_e , on constate que l'amplitude de v_s diminue également.

Deuxième expérience (oscillogramme de la figure 8):

- voies 1 et 2 en position DC.
- base de temps : $5 \mu\text{s}$ par carreau
- sensibilités :
 - voie 1 (en gras) : 2 V par carreau
 - voie 2 : $0,2 \text{ V}$ par carreau

Dans ce qui suit, on ne demande pas de calculs d'incertitudes mais les mesures devront être faites avec soin (tous les résultats devront être obtenus avec une incertitude relative inférieure à 10 %).

1. Pourquoi, dans chaque expérience, la tension de sortie v_s ne comporte-t-elle pas de composante continue contrairement à la tension d'entrée v_e ?
2. Première expérience : pourquoi peut-on obtenir une tension de sortie v_s quasi-sinusoïdale alors que la tension v_e est rectangulaire ?
3. Déduire de l'oscillogramme de la première expérience et du commentaire qui l'accompagne :
 - a) la pulsation ω_0 ,
 - b) la valeur de H_0 .
4. Dans la deuxième expérience, v_s est triangulaire alors que v_e est rectangulaire. Le filtre a un comportement intégrateur.
 - a) Donner l'expression approchée de $\underline{H}(j\omega)$ dans le domaine de fréquence correspondant à la deuxième expérience.
 - b) En utilisant l'oscillogramme de la deuxième expérience, déterminer, en justifiant précisément la méthode utilisée, le rapport $H_0 \omega_0 / Q$

En déduire la valeur de Q .

3 Oscillateur à résistance négative

I. Étude d'un dipôle simulant une résistance négative

On s'intéresse à un dipôle \mathcal{D} de bornes A et M , réalisé à l'aide d'un Amplificateur Opérationnel (A.O.) ou Amplificateur Linéaire Intégré (ALI) et conformément au schéma donné sur la Figure 1.

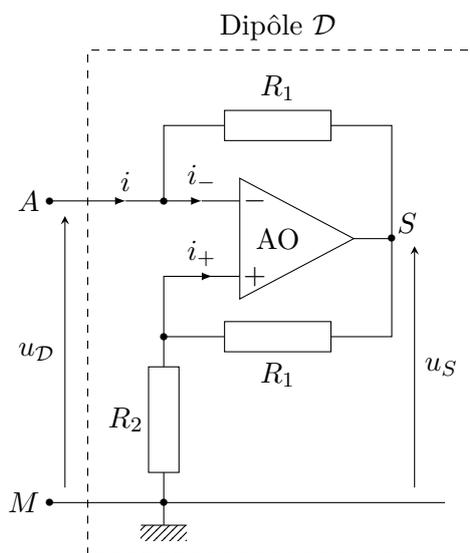


FIGURE 1 – Dipôle \mathcal{D} étudié

L'ALI est supposé idéal ; il peut fonctionner en régime linéaire ou en régime de saturation. Dans tout le problème, on fera les hypothèses suivantes :

- Les courants d'entrée i_+ et i_- sont nuls
- Si l'ALI est en régime linéaire alors :

$$\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad -U_{\text{sat}} < u_S < U_{\text{sat}}$$

où $U_{\text{sat}} > 0$ est la tension de saturation (de l'ordre de 13V), ε est la tension différentielle d'entrée et u_S la tension de sortie (différence de potentiel entre les points S et M)

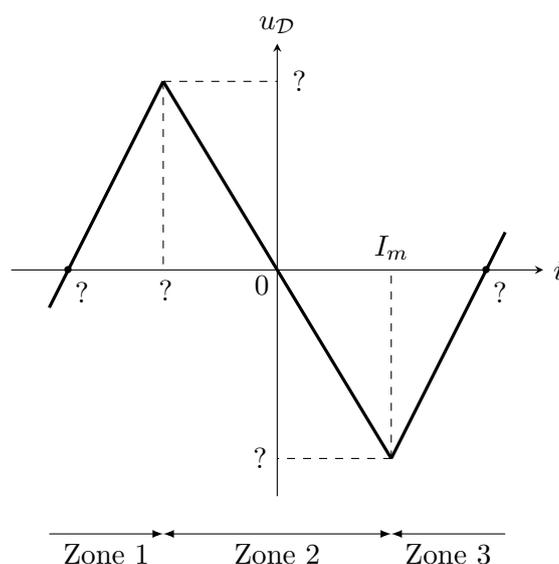
- En régime de saturation : $u_S = U_{\text{sat}}$ (saturation haute) si $\varepsilon > 0$ et $u_S = -U_{\text{sat}}$ (saturation basse) si $\varepsilon < 0$.

1. Montrer que lorsque l'ALI est en régime linéaire, la relation entre $u_{\mathcal{D}}$ et i est de la forme :

$$u_{\mathcal{D}} = -R_2 i$$

En déduire la valeur I_m de i ($I_m > 0$) telle que la tension u_S atteigne la saturation basse : $u_S = -U_{\text{sat}}$.

2. Pour $i \geq I_m$ l'ALI reste en régime de saturation basse. Montrer que la relation entre $u_{\mathcal{D}}$ et i devient $u_{\mathcal{D}} = R_1 i - U_{\text{sat}}$.
3. De la même façon, u_S atteint la saturation haute pour $i = -I_m$ et y reste pour $i < -I_m$. Que devient alors la relation entre $u_{\mathcal{D}}$ et i si $i < -I_m$?
4. Après l'avoir reproduit sur votre copie, compléter le schéma donné sur la Figure 2, visualisant la caractéristique de \mathcal{D} , c'est à dire $u_{\mathcal{D}}$ en fonction de i , i pouvant prendre des valeurs aussi bien négatives que positives. Expliciter les coordonnées des points remarquables (notés ?) de cette caractéristique.

FIGURE 2 – Caractéristique du dipôle \mathcal{D}

II. Montage oscillateur

Conditions de démarrage des oscillations

Le dipôle \mathcal{D} est désormais connecté à l'association en série d'un condensateur de capacité C , d'une bobine d'inductance L et d'une résistance R comme indiqué sur la Figure 3.

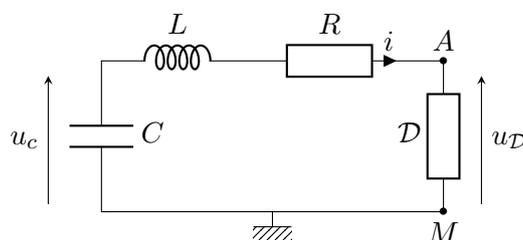


FIGURE 3 – Montage oscillateur

L'intensité i du courant circulant dans la bobine est initialement nulle et la tension aux bornes du condensateur est $u_c(t=0) = U_0$ suffisamment faible pour que le dipôle \mathcal{D} puisse être considéré comme une "résistance négative".

1. Montrer que $i(t)$ est solution d'une équation différentielle du second ordre de la forme

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0.$$

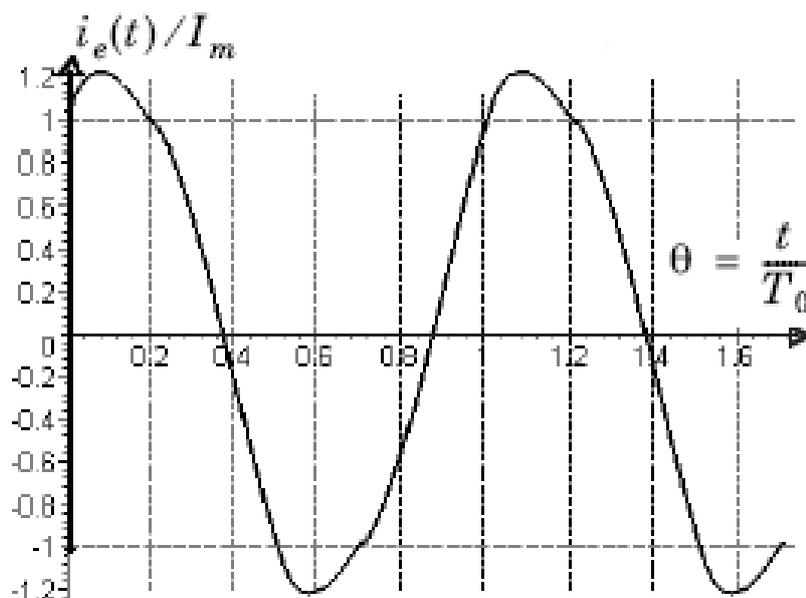
Exprimer l'amortissement ξ et la pulsation ω_0 en fonction de L , C , R et R_2 .

2. D'après les conditions initiales, quelles sont les valeurs de $i(t=0)$ et $\frac{di}{dt}(t=0)$? On suppose que $|\xi| < 1$. Expliciter la solution $i(t)$.
3. Que se passe-t-il si U_0 est nul? Commenter.

4. On suppose donc que U_0 n'est pas nul mais de très faible valeur. Quelle est la condition sur ξ puis sur R_2 pour que les oscillations de i présentent une amplitude croissante au cours du temps? On suppose désormais que cette condition est réalisée.
5. AN : $R_2 = 350 \Omega$, $R = 100 \Omega$, $C = 1,28 \text{ nF}$, $L = 2,0 \text{ mH}$. Calculer la valeur de ξ et de $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Amplitude des oscillations

6. Représenter l'allure de l'évolution de $i(t)$ en fonction du temps à compter de $t = 0$. En utilisant la caractéristique du dipôle \mathcal{D} , montrer que cette loi d'évolution n'est valable que sur une durée limitée.
7. Donner l'autre équation différentielle régissant l'évolution de $i(t)$ après cette phase de démarrage.
8. Après un régime transitoire que l'on n'étudiera pas, les variations de i en fonction du temps suivent un régime périodique établi. La figure ci-dessous montre les évolutions de i/I_m en fonction de la variable réduite $\theta = t/T_0$.



Déterminer les domaines de cette courbe qui se rapportent respectivement aux zones (1), (2) et (3) de la caractéristique de \mathcal{D} donnée sur la Figure 2.

9. Comment qualifier les oscillations représentées sur la figure précédente? Évaluer la période, puis la fréquence f de ces oscillations ainsi que la valeur maximale de i .

Application numérique : mêmes valeurs que précédemment, et $R_1 = 2,5 \text{ k}\Omega$ et $U_{\text{sat}} = 13 \text{ V}$.

10. Donner, pour ce régime établi, la valeur maximale de la tension $u_{\mathcal{D}}(t)$.