

**Corrigé du DS1 bis**  
2024-2025

## 1 Oscillateurs mécaniques - Mines Ponts MP 2016

Les commentaires du jury du concours sont écrits en *italique*.

*Le problème est sans difficulté notoire, très proche du cours. De nombreux candidats ont obtenu des notes honorables. Regrettons qu'un nombre substantiel de copies soient très mal présentées et/ou très mal écrites. Une telle attitude manifestement désinvolte est sanctionnée par le jury. Rappelons également aux candidats qu'il faut expliquer ce qu'ils font et que souvent un petit schéma est bien plus éclairant qu'une explication laborieuse.*

*Félicitons les candidats qui ont traité correctement l'ensemble des questions, démontrant ainsi leur maîtrise du cours et leur capacité de recul par rapport à celui-ci.*

### I. – Oscillateur simple

**Q1** – On applique la relation fondamentale de la dynamique (appelée encore théorème du centre d'inertie) à la masse  $m$ , dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Bilan des forces :

- Le poids :  $m\vec{g} = -mg\hat{u}_x$ .
- La force de rappel élastique :  $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\hat{u}_x$ , avec  $\ell = x$  d'après l'énoncé.
- La force de frottement fluide :  $\vec{F}_f = -\alpha\dot{x}\hat{u}_x$ .

On projette sur  $\hat{u}_x$  pour trouver :

$$m\ddot{x} = -mg - k(x - \ell_0) - \alpha\dot{x} \quad (1)$$

La technique classique consiste à trouver la position d'équilibre  $\tilde{x}$ , puis à poser  $X(t) = x(t) - \tilde{x}$ . On a donc à l'équilibre ( $\ddot{x} = 0$  et  $\dot{x} = 0$ ) :

$$-mg - k(\tilde{x} - \ell_0) = 0 \quad (2) \quad \text{d'où} \quad \tilde{x} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$$

( $\tilde{x}$  est inférieur à  $\ell_0$  comme il se doit). On fait ensuite (1) - (2), en notant que  $\dot{X} = \dot{x}$  et  $\ddot{X} = \ddot{x}$  pour obtenir :

$$m\ddot{X} = -kX - \alpha\dot{X} \quad \text{d'où} \quad \ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0$$

On peut alors identifier :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m} \quad \implies \quad \xi = \frac{\alpha}{2m\omega_0} = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}}$$

$\omega_0$  est la pulsation propre de l'oscillateur amorti et  $\xi$  est le coefficient d'amortissement (sans dimension).

*Question généralement bien traitée. On peut s'étonner néanmoins d'erreurs d'homogénéité sur la longueur à l'équilibre.*

**Q2** – • Cas où  $\xi = 0$  :

L'équation différentielle se réduit à :  $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$  et c'est un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0$ . La solution générale est :

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

avec les conditions initiales :  $X(0) = X_0 = A$  et  $\dot{X}(0) = V_0 = \omega_0 B$ . On auro donc :

$$X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Il s'agit d'une solution oscillante non amortie idéale (elle ne se rencontre pas en réalité).

• Cas où  $0 < \xi < 1$  :

On écrit l'équation caractéristique :  $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ . Son discriminant vaut :

$$\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) < 0$$

Il s'agit donc d'un régime pseudo-périodique. Les deux racines complexes conjuguées sont :

$$r_- = -\xi\omega_0 - i\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \quad \text{et} \quad r_+ = -\xi\omega_0 + i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

(attention à bien mettre  $1 - \xi^2$  sous la racine et pas  $\xi^2 - 1 < 0$ ). Pour simplifier les notations, on peut introduire la pseudo-pulsation :  $\omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ . La solution générale s'écrit alors :

$$X(t) = e^{-\xi\omega_0 t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

et

$$\dot{X}(t) = -\xi\omega_0 X(t) + e^{-\xi\omega_0 t} (-\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t))$$

On détermine les constantes  $A$  et  $B$  par les conditions initiales :

$$X(0) = A = X_0 \quad \text{et} \quad \dot{X}(0) = V_0 = -\xi\omega_0 A + \omega B$$

On obtient alors :

$$X(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left( X_0 \cos(\omega t) + \frac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

Il s'agit d'une solution oscillante amortie au cours du temps. Cela est plus réaliste.

Si l'on rajoute l'action du vent, c'est la force d'amortissement fluide totale qui se trouve modifiée et qui devient  $\vec{F}_f = -(\alpha - \beta) \dot{x} \hat{u}_x$  :  $\alpha$  est donc remplacé par  $\alpha - \beta$ . L'action globale est donc de diminuer le facteur d'amortissement  $\xi$ .

- Ce paramètre  $\xi$  peut alors devenir négatif ce qui engendre une instabilité : solution avec exponentielle divergente au lieu de sinusoidale amortie. Cela pose évidemment un grand problème pratique : le vent peut conduire à des oscillations amplifiées et à la destruction de la structure.

- Sans en arriver à ces extrémités, les oscillations sont moins rapidement amorties et peuvent conduire à un grand inconfort rendant le pont peu praticable.

*Très proche du cours néanmoins source de nombreuses erreurs. Remarquons que les candidats qui cherchent une solution en exponentielles complexes parviennent rarement à une expression explicite. Peu de candidats comprennent quelle est la conclusion "physique" de cette question, à savoir la possibilité d'un régime instable et divergent lorsque le vent est assez fort.*

- Q3** – La charge exercée par le piéton est donc  $\vec{F}(t) = -F(t)\hat{u}_x$ . En reprenant le PFD appliqué à la question **Q1**, l'équation du mouvement est transformée en :

$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m}\cos(\omega t) \quad \text{donc} \quad \ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m}\cos(\omega t)$$

avec  $\omega = 2\pi f$ . En introduisant  $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$  et en notant que  $\dot{X} = \dot{Y}$  et que  $\ddot{X} = \ddot{Y}$ , on obtient :

$$\boxed{\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m}\cos(\omega t) \quad (*)}$$

Pour trouver le régime sinusoïdal forcé, on utilise la représentation complexe et l'équation (\*) devient :

$$(-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2)Y_m e^{i\omega t} = -\frac{F_1}{m}e^{i\omega t}$$

d'où, en posant  $\underline{E} = \frac{F_1}{m}e^{i\omega t}$  on obtient :

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{-1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega} = \frac{-1/\omega_0^2}{1 + 2i\xi\Omega - \Omega^2}}$$

Remarque :

$\Omega$  est la pulsation réduite (sans dimension).

*De très nombreux candidats ne prennent pas le temps de réécrire une équation dynamique et se trompent de second membre.*

- Q4** – C'est une question de cours. On a affaire à un filtre passe-bas du second ordre. Celui-ci peut présenter une résonance lorsque le dénominateur de  $|\underline{H}(\omega)|$ , c'est à dire  $\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}$  est minimum, ce qui se produit aussi lorsque la fonction :

$$f : \Omega \mapsto (1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2 = 1 + (4\xi^2 - 2)\Omega^2 + \Omega^4$$

est minimale. On a :

$$f'(\Omega) = 4\Omega^3 + 4(2\xi^2 - 1)\Omega$$

d'où  $f'(\Omega) = 0$  a pour solutions  $\Omega = 0$  ou bien  $\Omega^2 = 1 - 2\xi^2$ . La résonance a lieu pour la seconde racine, ce qui n'est possible que si :

$$1 - 2\xi^2 > 0 \quad \text{et donc} \quad \boxed{\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

La pulsation réduite de résonance est alors  $\Omega_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ , ce qui conduit à :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 \times \Omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}}$$

On en déduit, en notant que  $1 - \Omega_r^2 = 2\xi^2$  :

$$|H(\omega_r)| = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}} \approx \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2}} \approx \frac{1}{2\omega_0^2\xi}$$

puisque  $\xi \ll 1$  et donc  $\xi^4 \ll \xi^2$ .

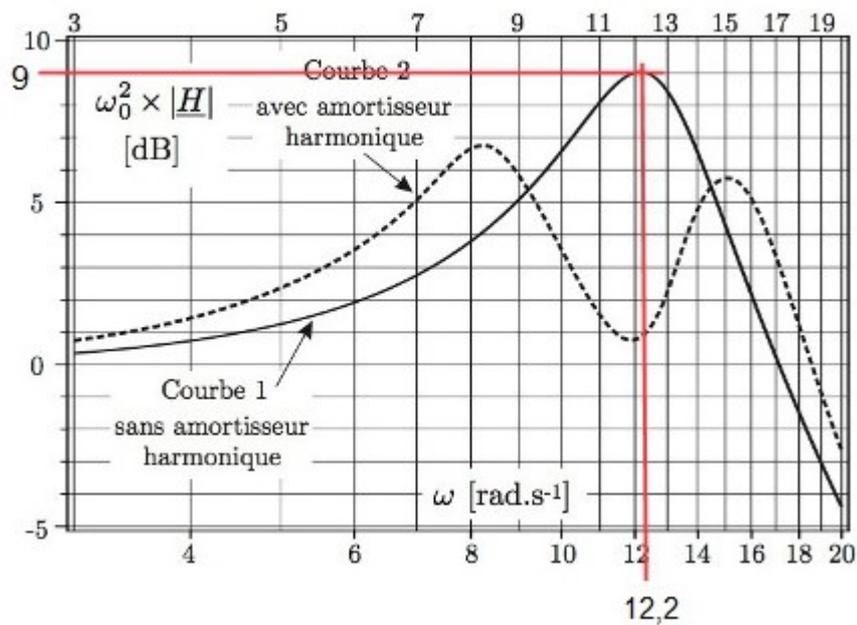
Afin d'éviter toute erreur il était sage de recalculer les valeurs demandées.

**Q5** – Il faut juste faire attention à l'unité des ordonnées qui est le dB. On peut lire sur le graphique l'ordonnée du pic de résonance et on en déduit :

$$\omega_0^2 \times |H| = \frac{1}{2\xi} \implies \omega_0^2 \times |H|(\text{dB}) = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{2\xi} \right) = -20 \log_{10}(2\xi) = 9$$

d'où :

$$\xi = \frac{10^{-9/20}}{2} \stackrel{AN}{=} 0,18$$



On lit sur le graphique la pulsation de résonance :  $\omega_r \simeq 12,2 \text{ rad.s}^{-1}$ . Or, lorsque  $\xi \ll 1$  on a  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \simeq \omega_0$ , d'où :

$$\omega_0 \simeq 12,2 \text{ rad.s}^{-1}$$

*Trop de candidat se contentent d'assimiler la pulsation propre à celle de résonance sans autre explication.*

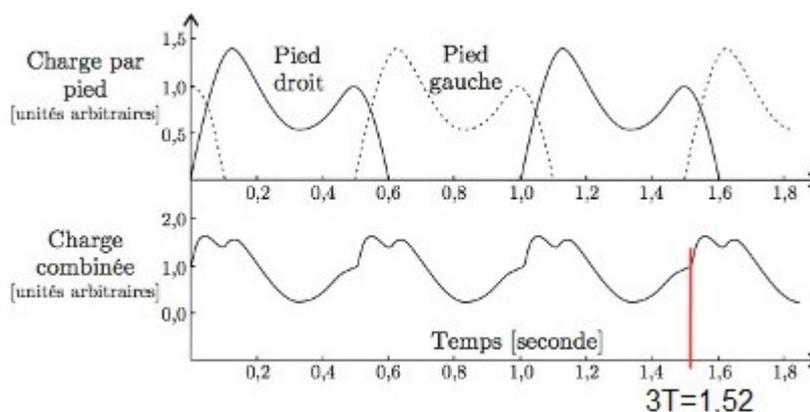
**Q6** – On a vu dans la question **Q4** que le déplacement de la structure devenait important au niveau de la fréquence de résonance. Il faut éviter ce phénomène d'autant plus que cela peut aller jusqu'à la destruction et au minimum un inconfort rendant le pont inutilisable.

*Question traitée correctement, bien que le lien entre résonance et dommages potentiels sur la structure du pont ne soit pas bien compris.*

On peut envisager un accéléromètre fixé au niveau de la hanche pour éviter les rotations et utiliser ensuite  $F = ma$ .

*Toute réponse cohérente sur le plan physique était valorisée.*

- Q8** – On mesure sur le graphique de la figure 2 une période  $T$  de l'excitation (charge du piéton) telle que  $3T$  est légèrement supérieure à 1,5 s. On en déduit :  $T \simeq 0,51$  s, d'où une fréquence  $F = 1/T \simeq 2$  Hz.



Cependant, ce signal n'est pas sinusoïdale et il ne contient donc pas une seule fréquence. Comme il est décomposable en série de Fourier, on peut prévoir que  $F = 2$  Hz est la fréquence du fondamental, mais qu'il peut y avoir les fréquences de toutes les harmoniques  $f_n = nF$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  qui sont des multiples de  $F$ . On peut donc éventuellement s'attendre à observer des fréquences (en Hz) de 2, 4, 6, 8, etc... (mais certaines harmoniques peuvent ne pas être présentes).

Le capteur enregistre ce signal et l'échantillonne. Or, selon le cours sur l'échantillonnage, le spectre du signal échantillonné est beaucoup plus riche que celui du signal non échantillonné. En effet, si  $F_e$  est la fréquence d'échantillonnage et que  $f_n$  est une des fréquences du signal non échantillonné, alors le signal échantillonné contient les fréquences :

$$f_n, |F_e \pm f_n|, |2F_e \pm f_n|, \text{ etc ...}$$

Si  $F_e$  est trop petite, on risque d'observer un repliement du spectre. En théorie, selon le critère de SHANNON, pour ne pas observer de repliement, il faut que  $f_{\max} < F_e/2$ , où  $f_{\max}$  est la fréquence maximale du spectre non échantillonné. Ici, il n'y a pas vraiment de  $f_{\max}$  car le signal d'origine contient sûrement des harmoniques dont les fréquences  $nF \rightarrow +\infty$ , mais avec des amplitudes qui tendent vers 0 et deviennent donc négligeables.

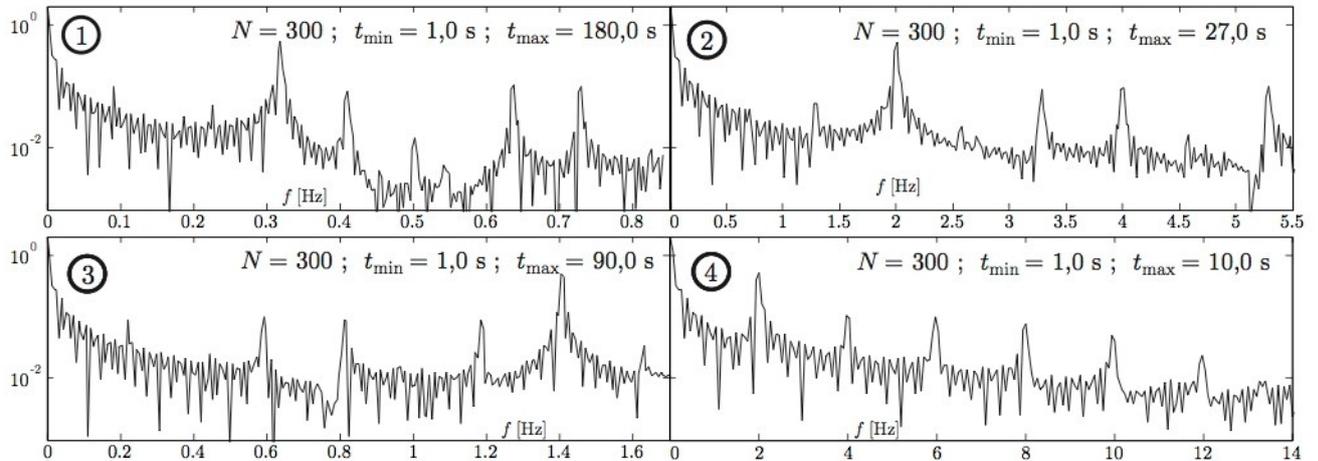
En tout état de cause, pour avoir un spectre correct du signal échantillonné, on doit au minimum imposer que  $F_e/2 > 10$  Hz et si possible bien au-dessus de ce seuil.

On peut calculer  $F_e$  correspondant à chacun des 4 enregistrements grâce à  $N$  (nombre de points échantillonnés) et à la durée  $t_{\max} - t_{\min}$  de l'acquisition. En effet, la période d'échantillonnage  $T_e$  est donnée par :

$$(t_{\max} - t_{\min}) = (N - 1) T_e \quad \text{d'où} \quad F_e = \frac{1}{T_e} = \frac{N - 1}{t_{\max} - t_{\min}}$$

On obtient les résultats :

Enregistrement	1	2	3	4
$F_e$ (Hz)	1,7	11,5	3,3	33



En conclusion :

- Les spectres 1 et 3 sont inexploitable car  $F_e$  est bien trop petite : le critère de Shannon n'est pas du tout respecté.
- Le spectre 2 correspond à  $F_e/2 = 5,75$  Hz permet de repérer les fréquences  $f_1 = 2$  Hz et  $f_2 = 4$  Hz du signal non échantillonné, mais on observe aussi les fréquences 3,3 Hz et 5,3 Hz qui sont des artefacts (fréquences du signal échantillonné non présentes dans le signal d'origine).
- Le meilleur spectre est le 4 car  $F_e$  est suffisamment grande ce qui évite le repliement. On peut donc y observer les fréquences caractéristiques du signal non échantillonné suivantes (fondamental et harmoniques) :

$$f_1 = 2 \text{ Hz}, f_2 = 4 \text{ Hz}, f_3 = 6 \text{ Hz}, f_4 = 8 \text{ Hz}, f_5 = 10 \text{ Hz}, f_6 = 12 \text{ Hz}, \text{ etc ...}$$

*Il était attendu une analyse en termes de théorème de Shannon et également en termes d'harmoniques. Le fait que le signal de la figure 2 soit périodique non sinusoïdal semble avoir échappé à la plupart.*

**Q9** – La fréquence de résonance du pont  $f_r = \omega_r/2\pi \approx 1,94$  Hz correspond quasiment à la fréquence de la marche ! (Quels sont les ingénieurs qui l'ont conçu ???).

Le système d'amortisseur n'a pas amorti grand chose (-2 dB), mais a par contre dédoublé les fréquences de résonance et créé une anti-résonance pour la fréquence de la marche. La véritable explication vient du couplage des deux oscillateurs, hors programme.

## 2 Filtrage d'un signal (d'après CCPINP-PSI-2003)

1. La sortie ne comporte pas de composante continue car le gain du filtre passe-bande tend vers 0 à basse fréquence :

$$\underline{H}(j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$

2. Dans la première expérience, on peut obtenir une sortie quasi-sinusoïdale en sélectionnant une seule composante du spectre du signal rectangulaire. Ceci n'est possible que parce que le filtre passe-bande est centré sur le fondamental du signal triangulaire ( $\omega_0 = \omega_1$ ), et que le facteur de qualité  $Q$  est grand. On notera que la condition  $\omega_0 = \omega_1$  est parfaitement vérifiée. En effet, sinon, un déphasage entre le signal sinusoïdal et le signal créneau aurait été visible.

3. (a) On lit sur la figure 7 la période du signal créneau :  $T_1 = 250 \mu s$ . D'après la question précédente, le filtre est centré sur le fondamental de sorte que la fréquence caractéristique du filtre  $f_0$  s'identifie avec  $f_1 = 1/T_1$ , et donc  $f_0 = 4 kHz$ . Finalement,

$$\boxed{\omega_0 = 2.5 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}}.$$

- (b) Comme le filtre est linéaire, la fonction de transfert du filtre (gain  $G$  et phase  $\varphi$ ) s'applique à chacune des composantes du signal créneau. Sachant que le signal d'entrée est donné par  $V_e(t) = \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)\omega_1 t]}{2k+1}$ , le signal de sortie peut donc s'écrire sous la forme :

$$V_s = \frac{V_0}{2} G(0) + \frac{2V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} G[(2k+1)\omega_1] \frac{\sin[(2k+1)\omega_1 t + \varphi((2k+1)\omega_1)]}{2k+1}$$

On a  $\omega_1 = \omega_0$ ,  $G(\omega_0) = H_0$  et  $\varphi(\omega_0) = 0$  d'après la fonction de transfert. Par ailleurs, le gain est pratiquement nul pour toutes les autres composantes si  $Q$  assez grand comme discuté avant. En ne gardant que le fondamental, on obtient donc :

$$V_s(t) = \frac{2V_0 H_0}{\pi} \sin(\omega_0 t)$$

Afin de déterminer la valeur numérique de  $H_0$ , il faut tout d'abord calculer  $V_0$ , dont la valeur se déduit de la lecture du décalage en tension. On lit  $Offset = \frac{V_0}{2} = 0.5 V$  donc  $V_0 = 1 V$ .

Par ailleurs, on peut lire l'amplitude de la sinusoïde de sortie sur la figure 7 :  $A_s =$

$$\frac{2V_0 H_0}{\pi} = 6 V, \text{ donc } \boxed{H_0 = \frac{\pi A_s}{2V_0} = 9.4}.$$

4. (a) Dans la seconde expérience, on lit  $T_1 = 25 \mu s$ , soit  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 2.5 \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$ . On a donc  $\omega_1 = 10\omega_0$ , de sorte que toutes les composantes (sauf la composante continue qu'il faudra traiter à part) du créneau de fréquences  $(2k+1)\omega_1$  sont "à haute fréquence", c'est à dire telles que  $\omega \gg \omega_0$ . Pour ces harmoniques,

$$\underline{H}(j\omega) \underset{\omega \gg \omega_0}{\approx} \frac{H_0 \omega_0}{jQ\omega} \propto \frac{1}{j\omega}.$$

On retrouve bien le caractère intégrateur annoncé pour le filtre.

- (b) En repassant la relation complexe précédente sous forme réelle, sachant que  $\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$ , on obtient :

$$\frac{dV_s}{dt} = \frac{H_0 \omega_0}{Q} V_e(t)$$

Par lecture sur une demi période :  $V_e = 2 V$  (attention, il faut choisir ici  $V_e = 2 V$  (et non pas 4V) car on s'intéresse à l'amplitude du signal à haute fréquence ( $\omega \gg \omega_0$ ); il faut donc retirer la composante continue<sup>1</sup>) et  $\frac{dV_s}{dt} = \frac{6 \times 0.2}{2.5 \times 5.10^{-6}} = 96.10^3 \text{ V.s}^{-1}$ .  
On en déduit donc :

$$\boxed{\frac{H_0\omega_0}{Q} = \frac{1}{V_e} \frac{dV_s}{dt} = 48.10^3 \text{ s}^{-1}}$$

- (c) Finalement, on peut maintenant en déduire  $Q = \frac{H_0\omega_0}{48.10^3} = \frac{9.4 \times 25.10^3}{48.10^3}$ , soit  $\boxed{Q = 4.9}$ .  
On vérifie bien que le facteur de qualité est assez important, ce qui justifie que l'on ne sélectionne qu'une seule composante du spectre du signal créneau.

---

1. Tout se passe donc comme si l'intégrateur était appliqué sur un signal d'amplitude  $V_e = 2V$ .

### 3 Oscillateur à résistance négative

#### I. Étude d'un dipôle simulant une résistance négative

1. D'après le schéma de la Figure 1 on peut écrire :

$$i = \frac{u_{\mathcal{D}} - u_S}{R_1} \quad \text{et} \quad v_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_S$$

grâce au théorème pont diviseur de tension. Comme l'A.O. est idéal et en régime linéaire :  $v_+ = v_- = u_{\mathcal{D}}$ , ce qui permet d'exprimer :

$$u_S = \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) u_{\mathcal{D}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_{\mathcal{D}} = -R_2 i}$$

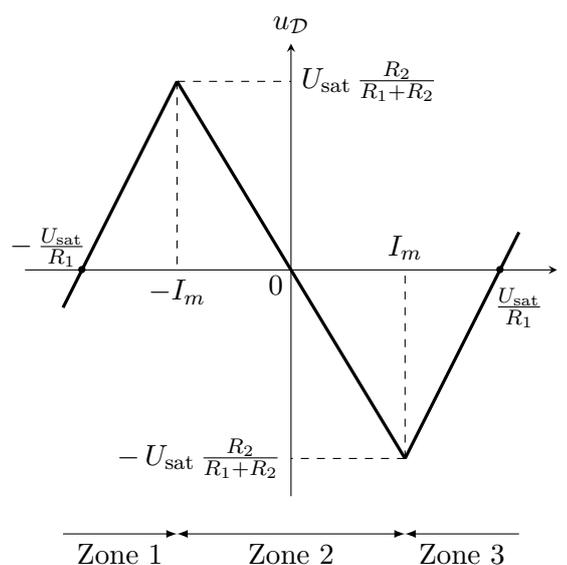
On a  $u_S = -U_{\text{sat}}$  si  $i = I_m$  et donc  $u_{\mathcal{D}} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{\text{sat}}$ , ce qui conduit à  $\boxed{I_m = \frac{U_{\text{sat}}}{R_1 + R_2}}$ .

2. On a toujours  $i = \frac{u_{\mathcal{D}} - u_S}{R_1}$  mais maintenant  $u_S = -U_{\text{sat}}$ , d'où le résultat :

$$u_{\mathcal{D}} = R_1 i - U_{\text{sat}}$$

3.  $u_{\mathcal{D}} = R_1 i + U_{\text{sat}}$

4. On obtient le schéma ci-dessous :



#### II. Montage oscillateur

##### Conditions de démarrage des oscillations

1. Dans la zone pour laquelle  $\mathcal{D}$  fonctionne en tant que "résistance négative", on peut écrire  $U_{\mathcal{D}} = -R_2 i$ . La loi des mailles s'écrit :

$$u_{\mathcal{D}} = u_c - L \frac{di}{dt} - R i$$

avec  $i = -C \frac{du_c}{dt}$ . Dérivons donc la relation ci-dessus par rapport au temps, avec  $u_{\mathcal{D}} = -R_2 i$  :

$$-R_2 \frac{di}{dt} = -\frac{i}{C} - L \frac{d^2 i}{dt^2} - R \frac{di}{dt}$$

On en déduit

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R - R_2}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Ainsi  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . D'autre part, par identification :

$$2 \frac{\xi}{\sqrt{LC}} = \frac{R - R_2}{L} \quad \text{soit} \quad \xi = \frac{R - R_2}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

2. La bobine est parcourue par  $i$  donc  $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$  (continuité de  $i$ ).

Par ailleurs, initialement  $u_{\mathcal{D}}(t = 0) = -R_2 i(t = 0) = 0$ . On en déduit qu'initialement :

$$u_c(t = 0) = L \frac{di}{dt}(t = 0) = U_0 \quad \text{soit} \quad \frac{di}{dt}(t = 0) = \frac{U_0}{L}$$

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$  s'écrit  $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ . Son discriminant réduit est  $\Delta' = (\xi^2 - 1)\omega_0^2 < 0$  (régime pseudo-périodique). Les racines de l'équation caractéristique sont donc complexes conjuguées  $r_{\pm} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$ . On en déduit la forme de la solution  $i(t)$

$$i(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left( A \cos\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}\right) + B \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}\right) \right)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes d'intégration, à déterminer avec les conditions initiales. À  $t = 0$ ,  $i(t = 0) = A = 0$ . Il reste à déterminer  $B$  en dérivant  $i$  par rapport au temps :

$$\frac{di}{dt} = e^{-\xi\omega_0 t} \left( -\xi\omega_0 B \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}\right) + B\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \cos\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}\right) \right)$$

La condition

$$\frac{di}{dt}(t = 0) = \frac{U_0}{L} = B\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

impose

$$B = \frac{U_0}{L\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

On obtient alors

$$i(t) = \frac{U_0}{L\omega_0} \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}\right)$$

3. Si  $U_0 = 0$ ,  $i$  reste identiquement nulle et rien ne se passe : le régime est stable et conforme aux conditions initiales. En revanche, dès que  $U_0 \neq 0$ ,  $i(t)$  évolue et décroît si  $\xi > 0$  ou croît si  $\xi < 0$ . Dans ce cas,  $i(t)$  est pseudo-périodique, les oscillations étant contenues dans une enveloppe exponentielle.

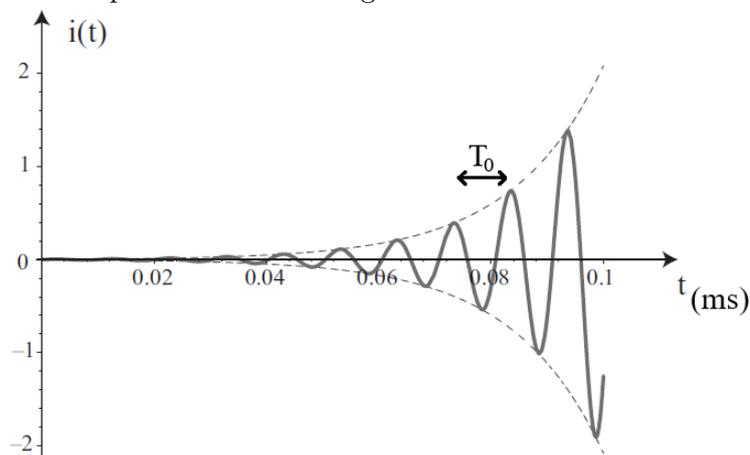
4. Les oscillations de  $i$  ont une amplitude exponentiellement croissante si  $\xi < 0$  c'est-à-dire si  $R_2 > R$ .

5.  $AN : \xi = \frac{100 - 0,35 \cdot 10^3}{2} \sqrt{\frac{1,28 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-3}}} = -0,1$  et  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-3} \times 1,28 \cdot 10^{-9}}} = 6,25 \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$ .

D'où  $T_0 = 10 \mu\text{s}$ .

### Amplitude des oscillations

6. La figure ci-dessous représente le démarrage des oscillations.



L'évolution représentée sur la figure ci-dessus n'est valable qu'à condition que  $|i(t)| < I_m$ .

7. Hors du régime linéaire précédent, la tension  $u_S$  sature nécessairement et l'équation  $u_D = -R_2 i$  est à remplacer par :

$$u_D = R_1 i \pm U_{\text{sat}}$$

La loi des mailles fournit :

$$u_D = u_c - L \frac{di}{dt} - R i$$

En remplaçant  $u_D$  par sa valeur et en dérivant la relation précédente par rapport au temps, on trouve :

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R_1 + R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0}$$

8. Tant que  $|i(t)| < I_m$ , le dipôle fonctionne en "résistance négative"  $u_D = -R_2 i$  (zone (2)).  
 Pour  $i(t) > I_m$ ,  $u_D = R i - U_{\text{sat}}$  (zone (3)) (saturation négative).  
 Pour  $i(t) < -I_m$ ,  $u_D = R i + U_{\text{sat}}$  (zone (1)) (saturation positive).

9. Les oscillations de  $i(t)$  sont **quasi-sinusoïdales**. La période des oscillations s'obtient plus précisément entre deux zéros, soit aux dates  $t_1 = 0,37 T_0$  et  $t_2 = 1,38 T_0$ . On en déduit

$$\boxed{T = 1,01 T_0 = 10,1 \mu\text{s}}$$

Il existe un écart relatif (de 1%) entre  $T$  et  $T_0$ , cohérent avec la relation  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ . La fréquence vaut

$$\boxed{f = 1/T = 99,0 \text{ kHz}}$$

On trouve par ailleurs

$$\boxed{i_{\text{max}} = 1,24 I_m}$$

Avec les valeurs numériques fournies :

$$I_m = \frac{U_{\text{sat}}}{R_1 + R_2} = \frac{13}{2,5 \cdot 10^3 + 0,35 \cdot 10^3} = 4,6 \text{ mA}$$

d'où

$$\boxed{i_{\text{max}} = 5,7 \text{ mA}}$$

10. D'après la caractéristique de  $\mathcal{D}$ , la tension  $u_D$  est maximale pour  $i = -I_m$  soit

$$\boxed{u_{D,\text{max}} = U_{\text{sat}} - R_1 I_m = 1,6 \text{ V}}$$