1 Révisions atomistique MPSI

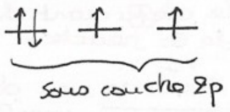
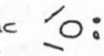
I Atomistique

1. les règles utilisées sont :

ⓐ le principe de Pauli : 2 e^- dans un atome ne peuvent pas avoir leurs 4 nombres quantiques égaux.

ⓑ la règle de Klechkowski : dans l'état fondamental, l'ordre de remplissage des sous-couches se fait par valeurs $(n+\ell)$ croissantes, en commençant, pour une valeur $n+\ell$ donnée, par le plus petit n.

ⓒ Règle de Hund : lorsqu'une sous-couche est incomplète, on doit y placer les e^- avec le plus possible de spins parallèles.

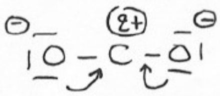
Pour O : $1s^2 2s^2 2p^4$  donc 

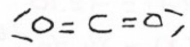
2. Il y a 6 électrons de valence : ceux des sous-couches 2s et 2p

Colonne : bloc p ou 16^e colonne

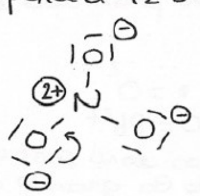
Période : 2^e période car $n_{max} = 2$

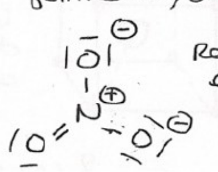
3. Pour CO_2 : $N_v(C) = 4$ e^- de valence donc la molécule possède en tout $4 + 2\times 6 = 16$ e^- de valence ce qui correspond à 8 doublets

1ère forme  mais C ne satisfait pas la règle de l'octet et il y a trop de charges formelles, d'où



4. Pour NO_3^- : $N_v(N) = 5$ donc $N_v(NO_3^-) = 5 + 6\times 3 + 1 = 24$ ce qui correspond à 12 doublets disponibles.

1ère forme  mais N ne satisfait pas la règle de l'octet et il y a trop de charges formelles ; d'où :

 Règle de l'octet satisfaite

5. a) La masse d'un nucléon (neutron ou proton) est presque égale à 1 g.mol^{-1}. Ainsi, si un atome possède A nucléons, sa masse molaire est presque égale à A.

- Pour les éléments légers, il y a autant de protons que de neutrons et donc :

$$A \approx 2Z \quad \text{et donc} \quad M \approx A \approx 2Z \quad \text{(Masse molaire)}$$

- Pour les éléments plus lourds, il y a plus de neutrons que de protons pour assurer la stabilité du noyau atomique (sinon il y aurait trop de charges positives). On a donc :

$$A > 2Z \quad \text{d'où} \quad M \approx A > 2Z$$

ce qui est bien le cas pour le Plomb.

b) Soient x, y et y les abondances isotopiques en ^{206}Pb, ^{207}Pb et ^{208}Pb respectivement. Ce sont des nombres réels compris entre 0 et 1. L'énoncé indique que $z = 52{,}4\% = 0{,}524$.

Un mole de plomb, c'est à dire une collection de N_A atomes de plomb a un masse M(Pb) = 207,21 g. Cette collection comprend :

- $x\,N_A$ atomes de ^{206}Pb chacun de masse $206/N_A$ g.
- $y\,N_A$ atomes de ^{207}Pb chacun de masse $207/N_A$ g.
- $z\,N_A$ atomes de ^{208}Pb chacun de masse $208/N_A$ g.

Ainsi, on peut écrire la masse totale des N_A atomes de plomb (en grammes) :

$$\begin{aligned}\mathrm{M(Pb)} &= x\,N_A \times \frac{206}{N_A} + x\,N_A \times \frac{207}{N_A} + x\,N_A \times \frac{208}{N_A} \\ &= 206\,x + 207\,y + 208\,z\end{aligned}$$

Ensuite on doit avoir $x + y + z = 1$. Connaissant la valeur numérique de z, on en déduit le système d'équations :

$$\begin{cases} 206\,x + 207\,y &= 98{,}218 \\ x + y &= 0{,}476 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

$$\boxed{x = 0{,}314 \ (31{,}4\,\%) \quad \text{et } y = 0{,}162 \ (16{,}2\,\%)}$$

c) Énergie de première ionisation : c'est l'énergie minimale à fournir à un atome dans une phase gazeuse pour lui arracher un électron, c'est à dire pour provoquer la réaction :

$$\mathrm{Pb}_{(g)} \longrightarrow \mathrm{Pb}^{+}_{(g)} + \mathrm{e}^{-}$$

L'énergie de deuxième ionisation est l'énergie minimale à fournir à l'ion $\mathrm{Pb}^{+}_{(g)}$ obtenu (toujours en phase gazeuse) pour lui arracher un électron selon :

$$\mathrm{Pb}^{+}_{(g)} \longrightarrow \mathrm{Pb}^{2+}_{(g)} + \mathrm{e}^{-}$$

Il faut que l'énergie du photon E_{ph} soit supérieure à $E_I(1)$ ou à $E_I(2)$. Or :

$$E_{\mathrm{ph}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \overset{AN}{=} 1{,}66.10^{-18}\ \mathrm{J}$$

et

$$E_I(1) = 715\ \mathrm{kJ.mol^{-1}} = \frac{715.10^3}{N_A} = 1{,}2.10^{-18}\ \mathrm{J}$$

et

$$E_I(2) = 1450\ \mathrm{kJ.mol^{-1}} = \frac{1450.10^3}{N_A} = 2{,}4.10^{-18}\ \mathrm{J}$$

d'où $E_I(1) < E_{\mathrm{ph}} < E_I(2)$: on peut donc observer la première ionisation mais pas la seconde.

2 Déviation de la lumière par les étoiles. Centrale MP 2009

Partie I - Déviation de la lumière par les étoiles

I. B.1) Il s'agit de la force de gravitation : $\vec{F} = -G\dfrac{mM}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}$. Au cours du mouvement plan de A :

$$-\,dE_p = \vec{F}.\overrightarrow{d\ell_M} = -\,G\,\frac{mM}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}.(dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta}) = -\,G\,\frac{mM}{r^2}\,dr$$

d'où :

$$\boxed{\frac{dE_P}{dr} = G\,\frac{mM}{r^2} \implies E_p(r) = -\,G\,\frac{mM}{r}}$$

I. B.2) La seule force agissante étant $\vec{F}$, le mouvement est *conservatif*. Il y a donc conservation de l'énergie mécanique $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + E_p(r)$. En particulier, lorsque le point A est très éloigné de l'étoile : $E_p(r) \to 0$ et $v = v_0$, d'où :

$$E_m = \frac{1}{2}\,mv_0^2 > 0$$

La trajectoire est donc une *hyperbole*.
I. B.3) $\overrightarrow{\sigma}^* = \overrightarrow{GA} \wedge m\vec{v}$. Le théorème du moment cinétique conduit à :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma^*}}{dt} = \overrightarrow{M_G}(\vec{F}) = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

d'où $\overrightarrow{\sigma^*}$ est un vecteur constant. Comme à tout instant : $\overrightarrow{GA} \perp \overrightarrow{\sigma^*}$ et $\vec{v} \perp \overrightarrow{\sigma^*}$, le mouvement se fait dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{\sigma^*}$.

I. B.4)

$$\overrightarrow{\sigma^*} = \overrightarrow{GA} \wedge m\vec{v} = r\,\overrightarrow{e_r} \wedge (\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$$

d'où :

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$$

constante des aires. D'autre part, en appliquant le principe fondamental de la dynamique au point A, nous obtenons :

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \implies \frac{d\vec{v}}{dt} = -\,G\,\frac{M}{r^2}\,\overrightarrow{e_r} = -\frac{GM}{C}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_r}}$$

Dérivons maintenant le vecteur $\vec{e}$ par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \alpha\,\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\,\alpha\,\frac{GM}{C}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_r} + \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_r}$$

En choisissant $\boxed{\alpha = \dfrac{C}{GM}}$ nous remarquons que cette dérivée s'annulle et donc que $\vec{e}$ est un vecteur constant.

I.C Étude de la trajectoire

I.C.1) Le moment cinétique étant conservé, on l'écrit dans les conditions initiales, lorsque $\overrightarrow{AM} = x_A\overrightarrow{e_x} + b\overrightarrow{e_y}$ avec $x_A \to -\infty$ et que $\vec{v} = v_0\overrightarrow{e_x}$. On obtient :

$$\overrightarrow{\sigma^*} = (x_A\overrightarrow{e_x} + b\,\overrightarrow{e_y}) \wedge mv_0\overrightarrow{e_x} = -\,mbv_0\,\overrightarrow{e_z}$$

De plus, $\overrightarrow{\sigma^*} = mC\,\overrightarrow{e_z}$ d'où on tire que :

$$\boxed{C = -bv_0 < 0}$$

Le signe de C est aussi celui de $\dot{\theta}$ conformément à la figure de l'énoncé.

I.C.2) La conservation de l'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$ entraîne l'égalité des énergies cinétiques initiale et finale, $E_{c0} = E_{c1}$ puisque $r \to +\infty$ dans ces deux états, ce qui annule l'énergie potentielle. On en déduit que :

$$\boxed{v_1 = v_0}$$

I.C.3) On a : $\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y}$.

- Lorsque $t \to 0$, $\theta \to \pi$ et donc $\overrightarrow{e_\theta} \to -\overrightarrow{e_y}$. De plus $\overrightarrow{v} \to v_0\,\overrightarrow{e_x}$. On obtient alors :

$$\boxed{\overrightarrow{e} = \alpha v_0\,\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y}}$$

- Lorsque $t \to +\infty$, $\theta \to -\Phi$ (attention au signe!) et donc $\overrightarrow{e_\theta} \to \sin\Phi\,\overrightarrow{e_x} + \cos\Phi\,\overrightarrow{e_y}$. De plus, $\overrightarrow{v} \to \overrightarrow{v_1} = v_0\cos\Phi\,\overrightarrow{e_x} - v_0\sin\Phi\,\overrightarrow{e_y}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e} &= \alpha v_0\,(\cos\Phi\,\overrightarrow{e_x} - \sin\Phi\,\overrightarrow{e_y}) - (\sin\Phi\,\overrightarrow{e_x} + \cos\Phi\,\overrightarrow{e_y})\\ &= (\alpha v_0\,\cos\Phi - \sin\Phi)\,\overrightarrow{e_x} - (\cos\Phi + \alpha v_0\sin\Phi)\,\overrightarrow{e_y}\end{aligned}$$

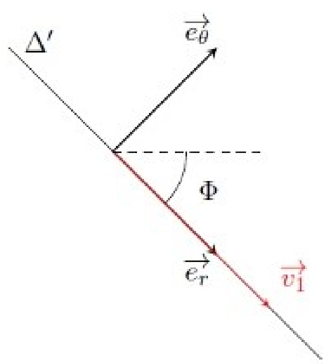
La conservation de $\overrightarrow{e}$ entraîne les deux équations (par identification des composantes selon $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ respectivement :

$$\begin{cases}\alpha v_0(1-\cos\Phi) = -\sin\Phi\\ 1+\cos\Phi = -\,\alpha v_0\sin\Phi\end{cases}$$

En utilisant les identités trigonométriques : $1+\cos\Phi = 2\cos^2\left(\dfrac{\Phi}{2}\right)$, $1-\cos\Phi = 2\sin^2\left(\dfrac{\Phi}{2}\right)$ et $\sin\Phi = 2\sin\left(\dfrac{\Phi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\Phi}{2}\right)$, on remarque que ces deux équations conduisent à la même équation :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) = -\,\alpha v_0\,\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \implies \tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) = -\,\frac{1}{\alpha v_0} = -\,\frac{GM}{Cv_0} > 0}$$

Remarque : on peut aussi déduire les projections de $\overrightarrow{e_\theta}$ et de $\overrightarrow{v_1}$ dans l'état final à partir des considérations géométriques ci-dessous, en constatant, que $\overrightarrow{e_r}$ tend à s'aligner sur la droite Δ', de même que $\overrightarrow{v_1}$. Le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$ devient alors orthogonal à Δ'.



I.C.4) La conservation de l'énergie mécanique impose :

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{d}$$

où v est la norme de la vitesse lorsque la particule est à la distance d de G. Comme d est la distance minimale, à cet instant nous aurons $\dot{r} = 0$, ce qui impose que $\overrightarrow{v} = r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} = \frac{C}{r}\,\overrightarrow{e_\theta} = \frac{C}{d}\,\overrightarrow{e_\theta}$. On en déduit que :

$$v^2 = \frac{C^2}{d^2} \implies \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{d^2} - \frac{GMm}{d}$$

ce qui conduit à l'équation du second degré en $1/d$:

$$\boxed{\frac{C^2}{d^2} - \frac{2GM}{d} - {v_0}^2 = 0}$$

Le discriminant de cette équation vaut :

$$\Delta = 4\left(G^2M^2 + C^2{v_0}^2\right) > 0$$

et la seule racine positive est :

$$\frac{1}{d} = \frac{GM + \sqrt{G^2M^2 + C^2{v_0}^2}}{C^2}$$

d'où :

$$\boxed{d = \frac{C^2}{GM + \sqrt{G^2M^2 + C^2{v_0}^2}}}$$

I.C.5) La question est surprenante puisqu'on peut se demander ce qui, à v_0 fixée, pourrait faire varier la distance minimale d. Il n'y a que deux possibilités : soit c'est la masse M de l'astre qui varie, soit c'est le paramètre d'impact b. Étudions leur influence respective en faisant varier M ou b séparément (c'est à dire en faisant varier l'un des deux et en fixant l'autre).

- M variable ; b fixé : comme $C = -bv_0$, C sera fixée aussi. En regardant l'expression de d, on constate qu'une augmentation de M fait diminuer d (ce qui est logique d'un point de vue physique puisque l'attraction gravitationnelle de l'astre sera alors plus élevée). Comme :

$$\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) = -\frac{GM}{Cv_0} = \frac{GM}{b{v_0}^2}$$

  cette même augmentation de M fait augmenter $\tan(\Phi/2)$ donc augmente Φ. Ainsi, Φ et d varient en sens inverse. *Une diminution de d fait augmenter Φ et une augmentation de d fait diminuer Φ.*

- b variable ; M fixée : $C^2 = {v_0}^2 b^2$ est une fonction croissante de b. Posons $x = C^2$ et étudions l'évolution de d avec x en étudiant la fonction :

$$f : x \longmapsto \frac{x}{GM + \sqrt{G^2M^2 + {v_0}^2 x}},\ x \geqslant 0$$

On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{GM + \sqrt{G^2M^2 + {v_0}^2 x} - x\frac{{v_0}^2}{2\sqrt{G^2M^2+{v_0}^2x}}}{(GM + \sqrt{G^2M^2 + {v_0}^2 x})^2} \\ &= \frac{2GM\sqrt{G^2M^2 + {v_0}^2x} + 2G^2M^2 + 2{v_0}^2x - {v_0}^2x}{2\sqrt{G^2M^2 + {v_0}^2x}\,(GM + \sqrt{G^2M^2 + {v_0}^2x})^2} \\ &= \frac{2GM\sqrt{G^2M^2 + {v_0}^2x} + 2G^2M^2 + {v_0}^2x}{2\sqrt{G^2M^2 + {v_0}^2x}\,(GM + \sqrt{G^2M^2 + {v_0}^2x})^2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

On en déduit que f est une fonction croissante de x, donc que d augmente avec C^2 donc avec b. Comme $\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right)$ diminue si b augmente, on en déduit à nouveau que Φ et d varient en sens inverse. *Une diminution de d fait augmenter Φ et une augmentation de d fait diminuer Φ.*

I.C.6) Reprenons l'équation du trinôme établie à la question **I.C.4)** et mettons-la sous la forme :

$$C^2 = {v_0}^2d^2 + 2GMd \implies C = -\sqrt{{v_0}^2d^2 + 2GMd} < 0$$

En reportant cela dans l'expression de $\tan(\Phi/2)$, nous obtenons[1] :

$$\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) = -\frac{GM}{Cv_0} = \frac{GM}{v_0\sqrt{{v_0}^2d^2 + 2GMd}} = \frac{GM}{{v_0}^2\sqrt{d(d + \frac{2GM}{{v_0}^2})}}$$

En particulier, si $d = R$, $\Phi = \Phi_0$, ce qui donne :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\Phi_0}{2}\right) = \frac{GM}{{v_0}^2\sqrt{R(R + \frac{2GM}{{v_0}^2})}} \quad \text{et donc} \quad \rho = \frac{2GM}{{v_0}^2}}$$

I.C.7) Dans le cas où $v_0 = c$:

$$\boxed{\rho = \frac{2GM}{c^2} \overset{AN}{=} 2{,}95 \text{ km}}$$

Remarque : en astrophysique, le rayon de Schwarzschild d'un astre est la distance pour laquelle la vitesse de libération d'un objet devient égale à la vitesse de la lumière dans le vide c. On l'obtient en considérant que l'objet peut encore s'échapper de l'attraction gravitationnelle exercée par l'astre, en atteignant l'infini mais avec une vitesse nulle et en écrivant la conservation de l'énergie mécanique :

$$\underbrace{\frac{1}{2}mc^2 - \frac{GMm}{\rho}}_{E_m \text{ au lancement}} = \underbrace{0}_{E_m \text{ à l'infini}} \implies \rho = \frac{2GM}{c^2}$$

En dessous de ce rayon, la vitesse de libération devient supérieure à c, ce qui est impossible. *Aucun objet, même pas la lumière ne pourra alors échapper à l'attraction gravitationnelle de l'astre.*

1. On voit ici qu'on peut directement exprimer $\tan(\Phi/2)$ (et donc $\Phi/2$) en fonction de d. On constate alors facilement que si d augmente, Φ diminue. On aurait pu utiliser cette expression pour répondre à la question **I.C.5)**

I.D.1) Puisque $R \gg \rho$, l'expression de $\tan\left(\dfrac{\Phi_0}{2}\right)$ trouvée à la question **I.C.6)** peut être simplifiée pour trouver (avec $v_0 = c$) :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\Phi_0}{2}\right) = \frac{GM}{Rc^2} \quad \text{d'où} \quad \Phi_0 = 2\arctan\left(\frac{GM}{Rc^2}\right) = 4{,}24.10^{-6}\,\text{rad} = 0{,}88\,''}$$

On rappelle qu'une seconde d'arc, notée $''$, est égale à $1/3600°$ et donc que $1°$ vaut $3600''$

I.D.2) L'éclipse de Soleil permet de distinguer la lumière beaucoup plus faible provenant de l'étoile E au moment où la déviation a lieu, donc au moment où l'étoile est au bord du disque solaire. La valeur $\Phi_e \neq \Phi_0$ résulte de phénomènes relativistes. La mesure de 1919 constitua la première cofirmation expérimentale de la relativité générale.

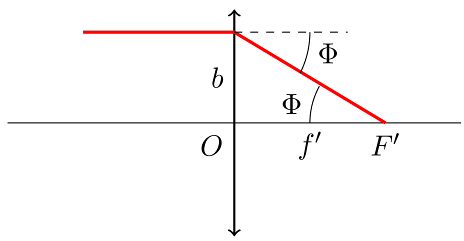
I.E.1) On peut écrire $\Phi = \kappa \dfrac{GMm}{b}\dfrac{1}{mc^2}$. La grandeur mc^2 a la dimension d'une énergie cinétique et la grandeur GMm/b celle d'une énergie potentielle. κ est donc (comme Φ) sans dimension et s'exprime donc sans unité.

I.E.2) Dans une lentille convergente ordinaire la déviation Φ d'un rayon parallèle à l'axe optique vérifie (cf. schéma ci-dessous) :

$$\tan\Phi = \frac{b}{f'} \quad \text{d'où} \quad f' = \frac{b}{\tan\Phi} \approx \frac{b}{\Phi} \quad \text{si} \quad \Phi \ll 1$$

où f' est la distance focale image de la lentille. On en déduit que :

$$\boxed{f' = \frac{b^2c^2}{\kappa GM}}$$



I.E.3) Application numérique :

$$\boxed{f' = \frac{R^2c^2}{2GM} = 1{,}63.10^{14}\,\text{m} = 0{,}0152\,\text{AL}}$$

I.E.4) Il y a convergence du faisceau de lumière émise par l'étoile lointaine. Si la lumière converge vers l'observateur, l'étoile observée semblera plus lumineuse qu'elle n'est en réalité.