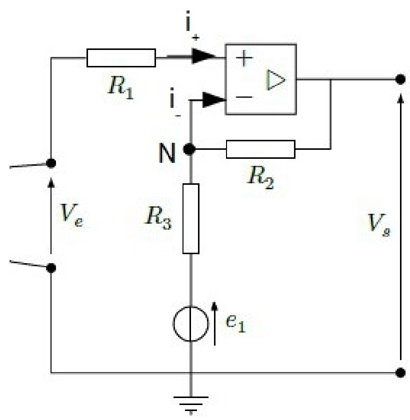
**Corrigé du DM n°2**

# 1 Utilisation en capteur de forces. Centrale TSI 2020

### I.A - Mesure de l'intensité d'une force s'exerçant sur une lame piézoélectrique

**Q 1.** Un amplificateur linéaire intégré idéal a des courants d'entrée nuls ($i_- = i_+ = 0$ A) et une différence de potentiel entre ses deux bornes d'entrée $v_+ - v_- = 0$ V.




Comme $i_+ = 0$ la tension aux bornes de la résistance $R_1$ est nulle et donc $v_+ = V_e$. Appliquons une loi des nœuds à l'aide des potentiels (LDNV) en $N$ :

$$\frac{V_s - v_N}{R_2} = \frac{v_N - e_1}{R_3} \implies R_3\,V_s + R_2\,e_1 = (R_2 + R_3)\,v_N$$

Or $v_N = v_+ = V_e$ et il s'ensuit que :

$$\boxed{V_e = \frac{R_2}{R_2 + R_3}\,e_1 + \frac{R_3}{R_2 + R_3}\,V_s}$$

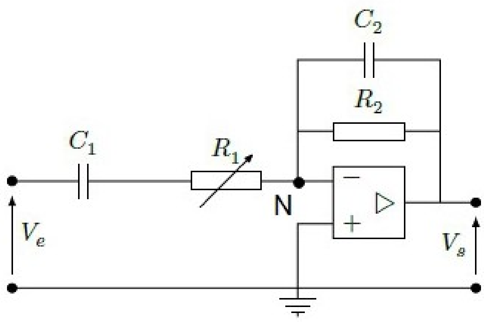
Le résultat ne dépend donc pas de $R_1$.

**Q 2.** A.N. : $V_e = 0{,}95$ V

**Q 3.** De $CV_e = KF$ on tire que :

$$\boxed{F = \frac{C}{K}\,V_e = 0{,}76 \text{ N}}$$

### I.B - Mesure de la fréquence d'une force excitatrice sinusoïdale s'exerçant sur une lame



**Q 4.** On travaille en régime sinusoïdal forcé, on passe donc par un modèle d'impédances complexes. Appliquons à nouveau la LDNV en $N$. On commence par associer capacité et résistance pour former des impédances équivalentes :

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \frac{R_1}{1 + jR_2C_2\omega}$$

Il vient :

$$\frac{\underline{V}_e - \underline{V}_n}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{V}_N - \underline{V}_s}{\underline{Z}_2}$$

Or $\underline{V}_N = 0$ et donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = -\,\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

En développant un peu l'expression obtenue on obtient :

$$\begin{aligned}\underline{H}(j\omega) &= -\,\frac{R_1}{R_1 + j\,R_1R_2C_2\omega + \frac{1}{j\,C_1\omega} + R_2\frac{C_2}{C_1}} \\ &= -\,\frac{R_1}{R_1 + R_2\frac{C_2}{C_1}}\;\frac{1}{1 + j\,\frac{R_1R_2C_2}{R_1 + R_2C_2/C_1}\,\omega - j\,\frac{1}{C_1(R_1 + R_2\frac{C_2}{C_1})\omega}}\end{aligned}$$

d'où par identification :

$$\boxed{A = \frac{R_1C_1}{R_1C_1 + R_2C_2} \;\; ; \;\; \omega_1 = \frac{R_1C_1 + R_2C_2}{R_1R_2C_1C_2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_1C_1 + R_2C_2}}$$

**Q 5.** Ce filtre est manifestement un **filtre passe-bande** du second ordre puisque $|\underline{H}(j\omega)| \longrightarrow 0$ si $\omega \longrightarrow 0$ et que $|\underline{H}(j\omega)| \longrightarrow 0$ si $\omega \longrightarrow +\infty$.

**Q 6.** Le gain passe par un maximum lorsque :

$$\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} = 0 \iff \boxed{\omega = \sqrt{\omega_1\omega_2}}$$

**Q 7.** On relie les deux bornes de l'entrée à la voie 1 d'un oscilloscope et les deux bornes de sortie à la voie 2, en prenant garde de faire coïncider la masse de l'oscilloscope avec celle du montage (donnée par la sortie 0V de l'alimentation de l'amplificateur intégré).

Les deux tensions $V_e$ et $V_s$ sont en opposition de phase si le maximum de l'une correspond au minimum de l'autre. Une autre méthode consiste à utiliser le mode XY de l'oscilloscope car dans ce cas :

$$V_e(t) = E\cos(\omega t) \quad \text{et} \quad V_s(t) = S\cos(\omega t + \pi) = -\,S\cos(\omega t)$$

On a donc $V_s(t) = -\,\frac{S}{E}\,V_e(t)$ et on observera en mode XY une droite de pente négative passant par l'origine $O$.

**Q 8.** On règle $R_1$ pour que le déphasage entre $V_e$ et $V_s$ soit égal à $\pi$, ce qui correspond à :

$$\arg\,\underline{H}(j\omega) = \pi \iff \underline{H}(j\omega)\ \text{réel} < 0 \iff \frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} = 0 \iff \boxed{\omega = \sqrt{\omega_1\omega_2}}$$

ce qui conduit à :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{f = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} \overset{\text{AN}}{=} 3{,}2.10^2\ \text{Hz}}$$

## 2 Filtrage d'une tension. Centrale MP 2015

**I.E.1)** Il faut utiliser un filtre passe-bas qui élimine ces fréquences élevées. Il ne doit garder que les fréquences situées entre 20 Hz et $f_{\max} = 20$ kHz, ce qui correspond à l'intervalle de fréquences des signaux audibles par les être humains.

**I.E.2)** Afin de respecter le critère de Shannon, il faut que $f_e > 2f_{\max} = 40$ kHz. En pratique on choisit $f_e = 44$ kHz.

**I.F)** On remarque qu'en passant de l'essai 1 à l'essai 4, la fréquence des signaux augmente. Ainsi, $s_2$ est en phase avec $s_1$ à "basse fréquence" et le déphasage entre $s_2$ et $s_1$ devient négatif (retard temporel) au fur et à mesure que la fréquence augmente. Il ne peut donc s'agir que du filtre de la figure 2 (identifié par son diagramme de phase), d'où :

$$H_{\mathrm{LP}}(j\omega) = \frac{H_{\mathrm{OLP}}\,\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}}$$

C'est un filtre passe-bas d'ordre 2.

- **Essai 1** : $s_2$ et $s_1$ sont en phase donc $\omega \ll \omega_0$ et donc $H_{\mathrm{LP}}(j\omega) \approx H_{\mathrm{OLP}}$. On mesure les amplitudes $S_{1m} = 1$V et $S_{2m} = 1{,}5$ V et donc :

$$\boxed{H_{\mathrm{OLP}} = \frac{S_{2m}}{S_{1m}} = 1{,}5}$$

- **Essai 3** : on remarque que $s_2$ est en quadrature de phase retard par rapport à $s_1$. On en déduit que $\varphi = \arg H = -\pi/2$ ce qui ne peut se produire que pour $\omega = \omega_0$ avec ce filtre.

  On mesure la période des signaux : $T = 5$ div $\times$ 20 $\mu$s/div = 100 $\mu$s. On a donc :

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = 10\,\mathrm{kHz} = f_0}$$

  Pour $\omega = \omega_0$, le gain du filtre vaut $G = |H| = Q\,H_{\mathrm{OLP}} = \frac{S_{2m}}{S_{1m}}$. On mesure $S_{2m} = 1{,}9$ div $\times$ 2 V/div = 3,8 V et $S_{1m} = 0{,}5$ V. On a donc :

$$\boxed{Q = \frac{S_{2m}}{S_{1m}\,H_{\mathrm{OLP}}} = 5{,}1}$$

On en déduit enfin la fréquence de coupure grâce à la formule (compliquée) donnée par l'énoncé :

$$\boxed{f_c = 15\text{ kHz}}$$

## 3 Mouvement d'un palet

1. Le palet est soumis à deux forces : la réaction $\overrightarrow{N}$ exercée par le sol qui, en l'absence de frottements, est toujours perpendiculaire au support et son poids $\overrightarrow{P}$. $\overrightarrow{N}$ est une force non conservative qui ne travaille pas car elle est perpendiculaire au déplacement à chaque instant. $\overrightarrow{P}$ est une force conservative qui dérive de l'énergie potentielle :

$$E_P^P(z) = mgz + \mathrm{Cste} = mgz$$

en choisissant la constante nulle (énergie potentielle de pesanteur nulle en $z = 0$). Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au palet entre les points $A$ et $C$ :

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{A\to C}(\overrightarrow{N}) + W_{A\to C}(\overrightarrow{P}) = W_{A\to C}(\overrightarrow{P})$$

or

$$W_{A\to C}(\overrightarrow{P}) = -\left[E_P^P(C) - E_P^P(A)\right] = -\left(mgz_C - mgz_A\right) = -2mgR$$

d'où :

$$\boxed{v_C^2 = v_A^2 - 4gR}$$

2. Appliquons le principe fondamental de la dynamique au palet entre $B$ et $C$ (mouvement circulaire). En utilisant la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$, nous obtenons :

   **Bilan des forces** :

$$\overrightarrow{N} = -N\,\overrightarrow{u_r} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P} = mg\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$$

   Avec une accélération $\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$, il vient :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 & = & -N + mg\cos\theta \\ mR\ddot{\theta} & = & -mg\sin\theta \end{cases}$$

   Or $v = R\dot{\theta}$. La première équation fournit donc la relation cherchée :

$$N = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\theta$$

   Lors du passage du point $B$ au point $C$, la norme $v$ de la vitesse diminue et $\cos\theta$ passe de $+1$ à $-1$. $N$ diminue entre $B$ et $C$ et elle est minimale en $C$ (où $\theta = \pi$) :

$$N_C = m\frac{v_C^2}{R} - mg$$

   Pour que le palet ne quitte pas le support, il faut que $\forall\, t, N > 0 \Longrightarrow N_C > 0$, d'où :

$$v_C^2 > gR \iff v_A^2 - 4gR > gR$$

   et donc :

$$\boxed{vA > \sqrt{5gR}}$$

3. On applique le principe fondamental de la dynamique au palet dans son mouvement de chute libre, la seule force appliquée étant le poids : $m\,\overrightarrow{a} = m\,\overrightarrow{g}$, d'où, en projection sur la base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$ :

$$\begin{cases} \ddot{x} & = & 0 \\ \ddot{z} & = & -g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} & = & -v_C \\ \dot{z} & = & -gt \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x & = & -v_Ct + d \\ z & = & -\frac{gt^2}{2} + 2R \end{cases}$$

4. Pour que le palet retombe en $A$, il faut qu'il existe une date $t_A$ telle que $x(t_A) = z(t_A) = 0$, ce qui donne :

$$\begin{cases} x(t_A) & = & -v_Ct_A + 3R = 0 \\ z(t_A) & = & -\frac{gt_A^2}{2} + 2R = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_A & = & \frac{3R}{v_C} \\ -\frac{g}{2}\frac{9R^2}{v_C^2} + 2R & = & 0 \end{cases}$$

   d'où :

$$\boxed{v_C^2 = \frac{9}{4}gR \iff v_C = \frac{3}{2}\sqrt{gR}}$$

   Comme $v_A^2 = v_C^2 + 4gR$, nous obtenons :

$$\boxed{v_A^2 = \frac{25}{4}gR \iff v_A = \frac{5}{2}\sqrt{gR}}$$

5. Le palet devant toujours retomber en $A$, la vitesse au point $C$ doit être identique à celle calculée à la question 4. Appliquons le théorème de l'énergie mécanique entre les points $A$ et $C$ ; la seule force non-conservative qui travaille étant la réaction tangentielle $\overrightarrow{T}$ entre $A$ et $B$, il vient :

$$E_m(C) - E_m(A) = W_{A \to B}(\overrightarrow{T}) = -fmgd$$

d'où :

$$\frac{1}{2}m \times \frac{9}{4}gR + mg \times 2R - \frac{1}{2}m \times (1,1)^2 \times \frac{25}{4}gR - 0 = -fmgd$$

ce qui conduit à :

$$\boxed{f = \frac{25R}{8d}\left((1,1)^2 - 1\right) \overset{AN}{=} 0{,}22}$$

On trouve un ordre de grandeur tout à fait correct pour le coefficient de frottement dynamique, compris entre 0 et 1.