

DS 2bis (Centrale - Mines)
(Samedi 12 octobre 2024 - Durée 3h30)

1 Pendule de Foucault

Le pendule de Foucault est un instrument historique qui a contribué à la mise en évidence de la rotation de la Terre sur elle-même. On le modélise par un fil de longueur $\ell = 67$ m de masse négligeable, au bout duquel est accrochée une masse $m = 36$ kg.

La Terre, assimilée à une boule de centre O et de rayon R_T , est supposée en mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire de rotation Ω autour de l'axe des pôles, supposé fixe à la fois dans le référentiel géocentrique et dans le référentiel terrestre. Le référentiel géocentrique est supposé galiléen.

- L'axe de rotation est appelé Δ et on note \vec{e} son vecteur unitaire directeur.
- Le référentiel terrestre est muni du repère $(Oxyz)$ de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (figure 1(a)).
- L'expérience est réalisée sur le globe terrestre au voisinage du point A situé à la latitude λ .
- Une des extrémités du fil du pendule est attachée au point B situé à la "verticale" de A sur l'axe Oz , l'autre extrémité étant reliée à la masse m . On note α l'angle entre le pendule et l'axe Oz (figure 1(b)).
- On introduit la base mobile $(\vec{e}_r, \vec{e}_\alpha)$ suivant le mouvement de la masse dans le référentiel terrestre.

Données numériques :

On prendra $R_T = 6,4 \times 10^3$ km, $M_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg et $G = 6,67 \times 10^{-11}$ SI.

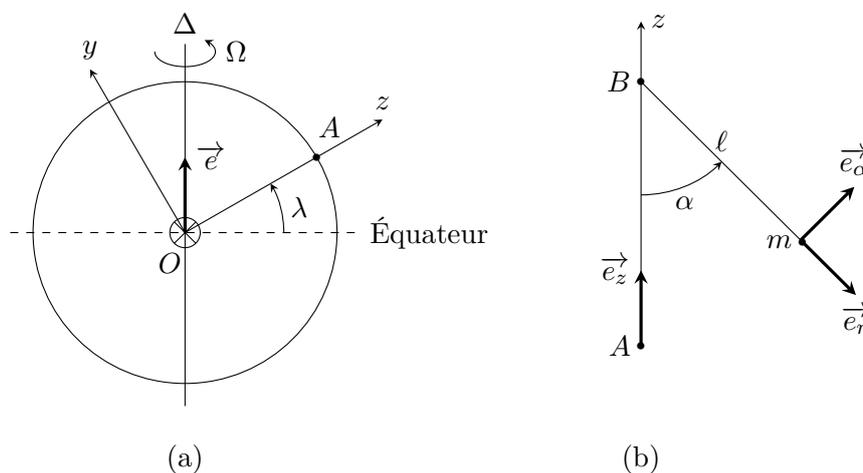


FIGURE 1 – (a) Définition du repère lié au référentiel terrestre. (b) Définition de l'angle α et de la base mobile.

1.1 Mouvement du pendule sans effet de la force d'inertie de Coriolis

Dans un premier temps, on néglige la force d'inertie de Coriolis.

1. Dans toute la suite on négligera la force d'inertie d'entraînement, et on considérera que le poids est parallèle à l'axe Oz . Justifier cette approximation par une analyse en ordres de grandeur.

2. Écrire l'équation vectorielle du mouvement de la masse m , puis la projeter dans la base mobile $(\vec{e}_r, \vec{e}_\alpha)$ définie sur la Fig. 1(b) (on supposera son mouvement plan). En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'angle α .
3. Dans quelle limite le pendule simple peut-il être approximé par un oscillateur harmonique ? On se placera dans cette approximation par la suite. Exprimer sa pulsation propre ω_0 . Déterminer la période d'oscillation du pendule et l'estimer numériquement pour le pendule de Foucault.
4. On note $\alpha_{\max} > 0$ la valeur maximale atteinte par l'angle α au cours du mouvement. Dans le cadre de l'approximation précédente, calculer la variation d'altitude Δz et la variation de position horizontale Δx au cours du mouvement et justifier que le mouvement de la masse est horizontal au premier ordre en α_{\max} .

1.2 Effet de la force d'inertie de Coriolis

On s'intéresse maintenant à la modification du mouvement engendrée par la présence de la force d'inertie de Coriolis. Paris est située à une latitude $\lambda = 49^\circ$ comme définie sur la figure 1(a) précédente. On négligera vitesse et accélération selon l'axe Oz .

Si (x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes de la masse m dans le repère $(Oxyz)$, on admettra que l'expression de la somme des forces autres que la force de Coriolis se met sous la forme $\vec{F} = -m\omega_0^2 x \vec{e}_x - m\omega_0^2 y \vec{e}_y$.

5. Comparer numériquement les pulsations Ω et ω_0 .
6. Décomposer le vecteur $\vec{\ell}$ dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et en déduire que les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\tilde{\Omega} \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\tilde{\Omega} \dot{x} \end{cases}$$

Exprimer la constante $\tilde{\Omega}$.

7. Pour résoudre ce système, on pose la variable complexe $\underline{u} = x + iy$. Déterminer l'équation vérifiée par \underline{u} . Résoudre cette équation et donner l'expression de $\underline{u}(t)$ en fonction de constantes complexes \underline{A} et \underline{B} .
8. On prend $x(0) = x_0, y(0) = 0$ et une vitesse initiale nulle. Déterminer l'expression de \underline{u} .
9. En utilisant le résultat de la question 5, simplifier l'expression de $\underline{u}(t)$. Interpréter l'expression obtenue.
10. Déterminer l'expression de l'angle ψ duquel a tourné le plan d'oscillation du pendule en 24 h à Paris dans le référentiel terrestre. L'estimer numériquement en degrés. Y a-t-il des points sur le globe où le plan d'oscillation du pendule reviendrait à sa position initiale en 24h ?
11. Justifier brièvement les valeurs inhabituelles choisies par Foucault pour la masse m et la longueur ℓ .
12. Sur la figure 2, on voit le professeur Tournesol utiliser son pendule pour se repérer et se diriger sur Terre. Cela vous semble-t-il possible ? Justifier votre réponse.



FIGURE 2 – Le professeur Tournesol et son pendule.

2 Programme d'exploration de Mars de la NASA

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains.

Ce sujet propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas ou peu guidées. Elles nécessitent plus de temps pour élaborer un modèle ou un raisonnement, le barème en tient compte.

Ce sujet est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie (même s'il n'a pas été utilisé). Les principales données numériques sont regroupées dans le document réponse.

I Le voyage entre la Terre et Mars

Dans toute cette partie du problème, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe a des ellipses. On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

I.A – Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

Q 1. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle G ainsi que son unité dans le système international.

Q 2. Montrer que le moment cinétique \vec{L}_O en O , centre du Soleil, d'un objet de masse m est une constante du mouvement.

Q 3. On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_z tel que $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z$. Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de L_O et m . Quel est le nom de cette grandeur ?

Q 4. Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R , la vitesse V de l'objet en fonction de G , M_S , R et m . Calculer les valeurs numériques de V_T , la vitesse orbitale de la Terre et de V_M , celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

I.B – Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

Q 5. Dédire l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G , M_S , R et m .

Q 6. Exprimer la période de rotation T de l'objet en fonction G , M_S et R (troisième loi de Kepler).

Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe de la trajectoire.

I.C – Voyage aller Terre – Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

Q 7. Représenter, sur la figure A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann).

La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).

Q 8. Au départ de l'orbite de la Terre, exprimer en fonction de V_T , a_M et a_T la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert. En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T .

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

Q 9. Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.

Q 10. Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t=0) - \theta_T(t=0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure A du document réponse.

Q 11. Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

I.D – Durée de la mission

Toujours pour minimiser le cout énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

Q 12. Déterminer l'angle α_1 (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ de Mars.

Q 13. En déduire le nombre de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge, la durée totale de la mission (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta \vec{V}_T$ colinéaire à \vec{V}_T plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25 % de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t=0) = 0$) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$. On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

Q 14. Placer sur la figure B du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.

Q 15. Justifier que r_P , le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie $r_P = a_T$.

Q 16. Montrer que l'excentricité s'écrit $e = \frac{a_M - a_T}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_M + a_T}$ et calculer sa valeur numérique. Tracer sur la figure B l'allure de la trajectoire.

Q 17. Exprimer l'énergie mécanique E_M du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m , V_T et e .

Q 18. En déduire la vitesse V_T'' que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e .

Q 19. Donner, en fonction de V_T et e , la variation de vitesse $\Delta V_T' = V_T'' - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V_T'$.

Q 20. Exprimer $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de a_T et V_T'' .

Q 21. Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars.

On donne : $\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = 2,15$ avec l'excentricité calculée en question 16.

Données

Masse du Soleil

$$M_S = 2,00 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Demi-grand axe de l'orbite de la Terre

$$a_T = 150 \times 10^6 \text{ km}$$

Demi-grand axe de l'orbite de Mars

$$a_M = 228 \times 10^6 \text{ km}$$

Constante gravitationnelle

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ SI}$$

Champ de pesanteur terrestre

$$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Période de révolution de la Terre

$$T_T = 365 \text{ jours}$$

Période de révolution de Mars

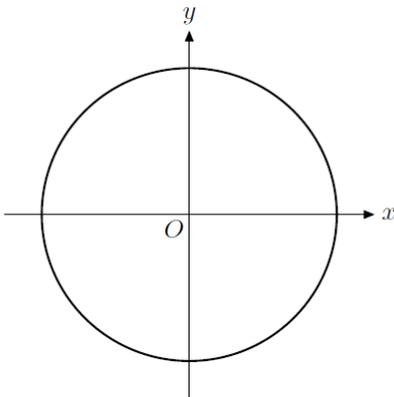
$$T_M = 687 \text{ jours}$$

Formulaire

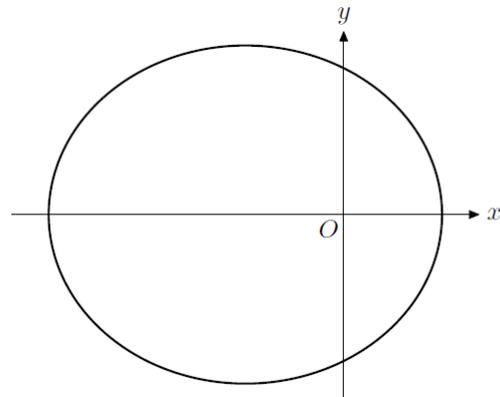
L'équation polaire d'une conique d'axe focal (Ox), de paramètre p et d'excentricité e s'écrit

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

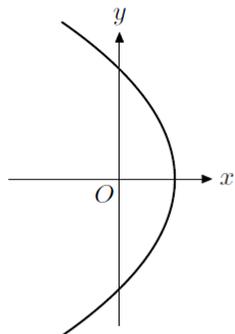
La nature de la courbe dépend de l'excentricité. On distingue 4 cas.



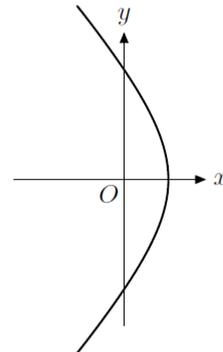
$e = 0$, la courbe est un cercle



$0 < e < 1$, la courbe est une ellipse



$e = 1$, la courbe est une parabole



$e > 1$, la courbe est une hyperbole

Les documents réponses sont à la toute fin de l'énoncé du DS, sont à détacher et à rendre avec votre copie.

3 Expérimenter avec un morceau de Scotch

Conditionné sous forme de rouleau, un ruban adhésif (généralement désigné par le terme « Scotch[®] ») est constitué de deux couches solidaires l'une de l'autre : une couche « molle » sur la face interne (celle qui colle) et une couche « dure » sur la face externe du rouleau (qui paraît néanmoins souple car très fine). L'épaisseur de l'ensemble est de l'ordre de quelques dizaines de micromètres. On propose d'étudier dans ce problème quelques expériences mettant en jeu les propriétés — adhésives ou autres — des rubans adhésifs.

Ce sujet est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie. Ce document réponse comporte également une annexe et regroupe des données numériques.

I Pelage d'un ruban adhésif collé sur un substrat plan

I.A – Principe de l'essai de pelage

Cette partie ne sera pas traitée ici. On présente néanmoins le schéma de l'expérience de façon à pouvoir faire le lien entre le scotch et la partie B.

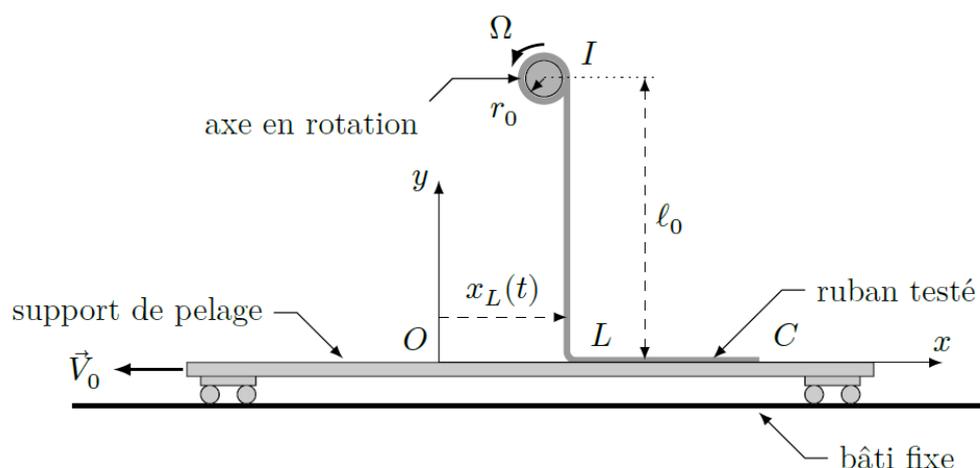


Figure 2 Schéma du dispositif pratique utilisé pour l'essai de pelage. Le repère Oxy est lié au support de pelage. Les points I et L correspondent aux limites entre les parties collée et décollée du ruban

L'objet de cette partie était de déterminer la loi d'évolution de $x_L(t)$ (longueur de scotch décollée à l'instant t). Cependant, la modélisation proposée en A n'est pas toujours observée en pratique car le ruban présente un comportement légèrement élastique qui y était négligé. Au début de l'essai, le ruban commence en effet par se tendre sans se décoller. Puis, lorsque la tension est suffisante, le décollément se produit brutalement, réduisant par conséquent la tension. Le décollément s'arrête alors spontanément, jusqu'à ce que la poursuite du mouvement tende suffisamment le ruban pour que le décollément reprenne, et ainsi de suite... Ce phénomène périodique, connu sous le nom de « stick-slip » (ou « collé-glissé »), est à l'origine du bruit caractéristique du décollément d'un ruban adhésif : « screech ». C'est ce phénomène qu'on cherche à étudier dans la suite.

I.B – Modélisation du comportement dynamique du ruban au cours de l'essai

Dans le référentiel \mathcal{R} lié au support de pelage, la dynamique du front de pelage s'apparente à celle du système masse-ressort représenté sur la figure 3. La portion de ruban au contact du support est modélisée par la masse m tandis que la portion décollée du ruban est modélisée par le ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 et dont l'extrémité I est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse $\vec{V}_p = -\vec{V}_0$. L'action du support sur le ruban est modélisée par une force de frottement $\vec{f} = f\vec{u}_x$ obéissant aux lois suivantes :

- la masse m ne glisse pas sur le support tant que $\|\vec{f}\| < F_p$;
- lorsque la masse m glisse sur le support, la force \vec{f} s'oppose au glissement et $\|\vec{f}\| = (1 - \varepsilon) F_p$ (avec ε une constante telle que $0 < \varepsilon < 1$).

On néglige l'action de la pesanteur sur l'évolution du système.

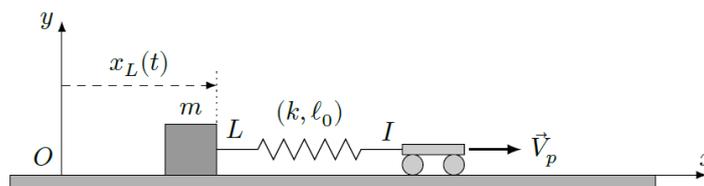


Figure 3 Système modèle pour l'étude du mouvement stick-slip

- I.B.1)** Le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ lié au support de pelage peut-il être considéré comme galiléen ?
- I.B.2)** À l'instant $t = 0$, on a $x_L(0) = 0$ et $\ell(0) = \ell_0$. Exprimer la longueur $\ell(t)$ du ressort pour $t > 0$, en fonction de ℓ_0 , $V_p = \|\vec{V}_p\|$, $x_L(t)$ et t .
- I.B.3)** On suppose de plus que $\dot{x}_L(0) = 0$. Montrer que l'évolution du système pour $t > 0$ commence nécessairement par une phase de *stick* (le ruban se tend sans se décoller). Déterminer à quel instant t_0 se termine cette phase.
- I.B.4)** Établir l'équation du mouvement de la masse m lors de la phase suivante (phase de *slip*). Identifier la pulsation propre ω_0 du système.
- I.B.5)** La solution de l'équation précédente s'écrit sous la forme

$$x_L(t') = C_1 \cos(\omega_0 t') + C_2 \sin(\omega_0 t') + V_p t' + C_3 \quad \text{avec } t' = t - t_0$$

Déterminer les expressions des constantes C_1 , C_2 et C_3 correspondant à cette phase du mouvement.

- I.B.6)** Une simulation numérique permet de représenter l'évolution de la solution *mathématique* $x_L(t')$ précédente pour différentes valeurs de la vitesse de pelage V_p . Les paramètres choisis pour réaliser cette simulation sont :

$$\varepsilon = 0,15 \quad \frac{F_p}{k} = 1,0 \text{ mm} \quad \omega_0 = 1,0 \times 10^4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Les courbes correspondant à $V_p = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $V_p = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ sont reproduites sur les figures A et B du document-réponse. Ces courbes sont accompagnées des portraits de phase du système, pour lesquels on représente $v_L(t') = \frac{dx_L}{dt'}(t')$ en fonction de $\ell(t') - \ell_0$.

- a) Faire apparaître, sur chacun des deux portraits de phase du document-réponse, le point représentatif de l'instant $t' = 0$. Indiquer, en le justifiant, quel est le sens de parcours de ces portraits de phase.
- b) En justifiant votre raisonnement par des *considérations graphiques précises*, indiquer, pour chacune des deux vitesses de pelage, si la phase de *slip* perdure indéfiniment ou si elle cesse à un instant t'_1 que l'on identifiera clairement sur les courbes.
- c) Dans le(s) cas où la phase de *slip* cesse, représenter (directement sur les figures A et/ou B du document réponse) l'allure de la solution *physique* $x_L(t')$ réellement obtenue et du portrait de phase associé.

Si les figures A et B de la page suivante ont été complétées, on détachera la dernière page du sujet et on l'insérera dans la copie, en prenant bien soin d'y inscrire son nom.

Nom :

Document réponse

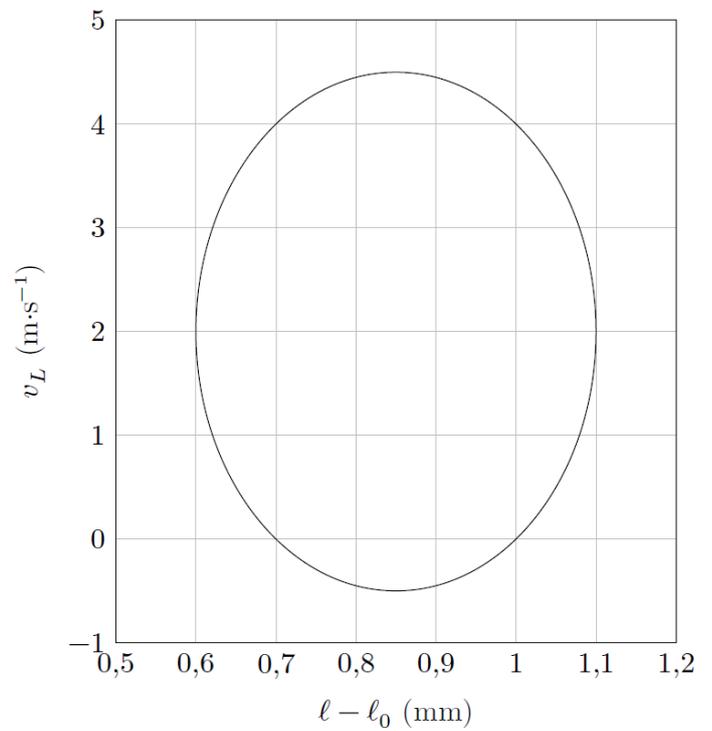
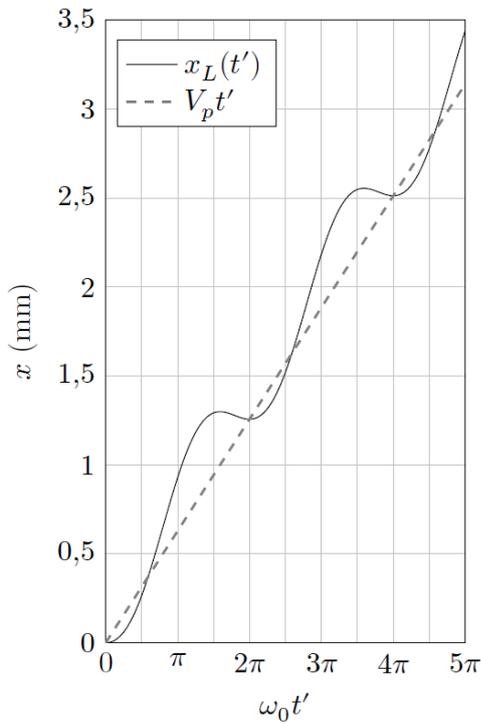


Figure A Résultats de la simulation numérique pour $V_p = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

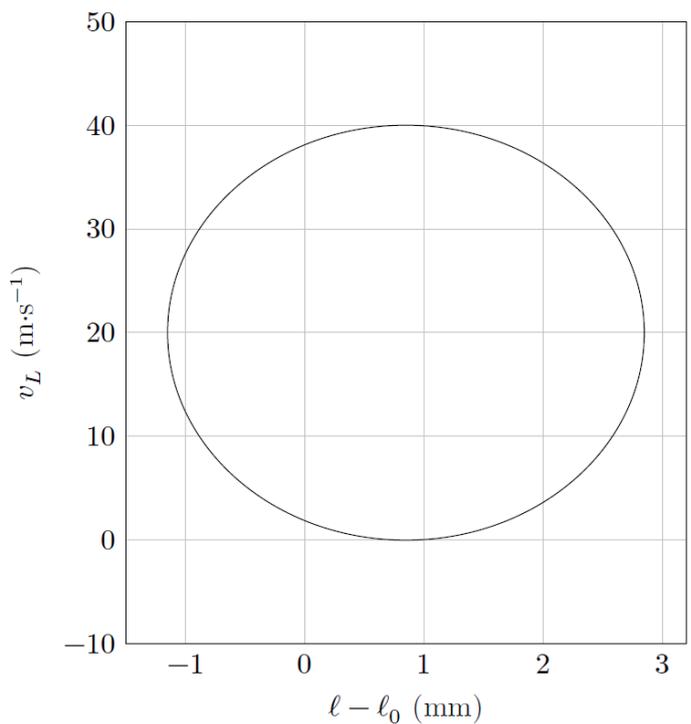
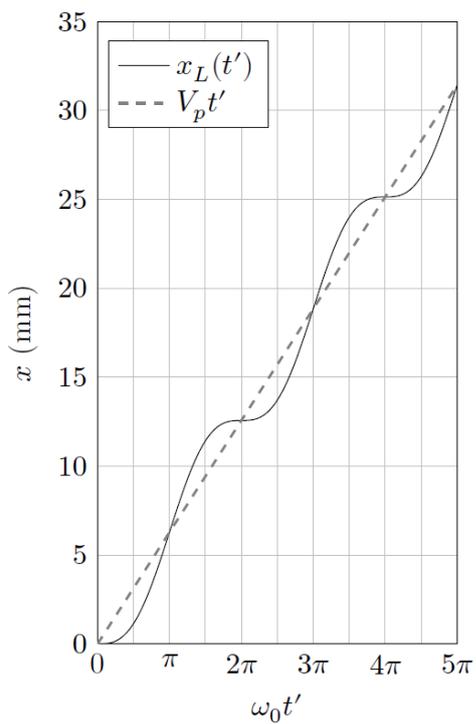


Figure B Résultats de la simulation numérique pour $V_p = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

NOM :

Prénom :

Questions 7 et 10

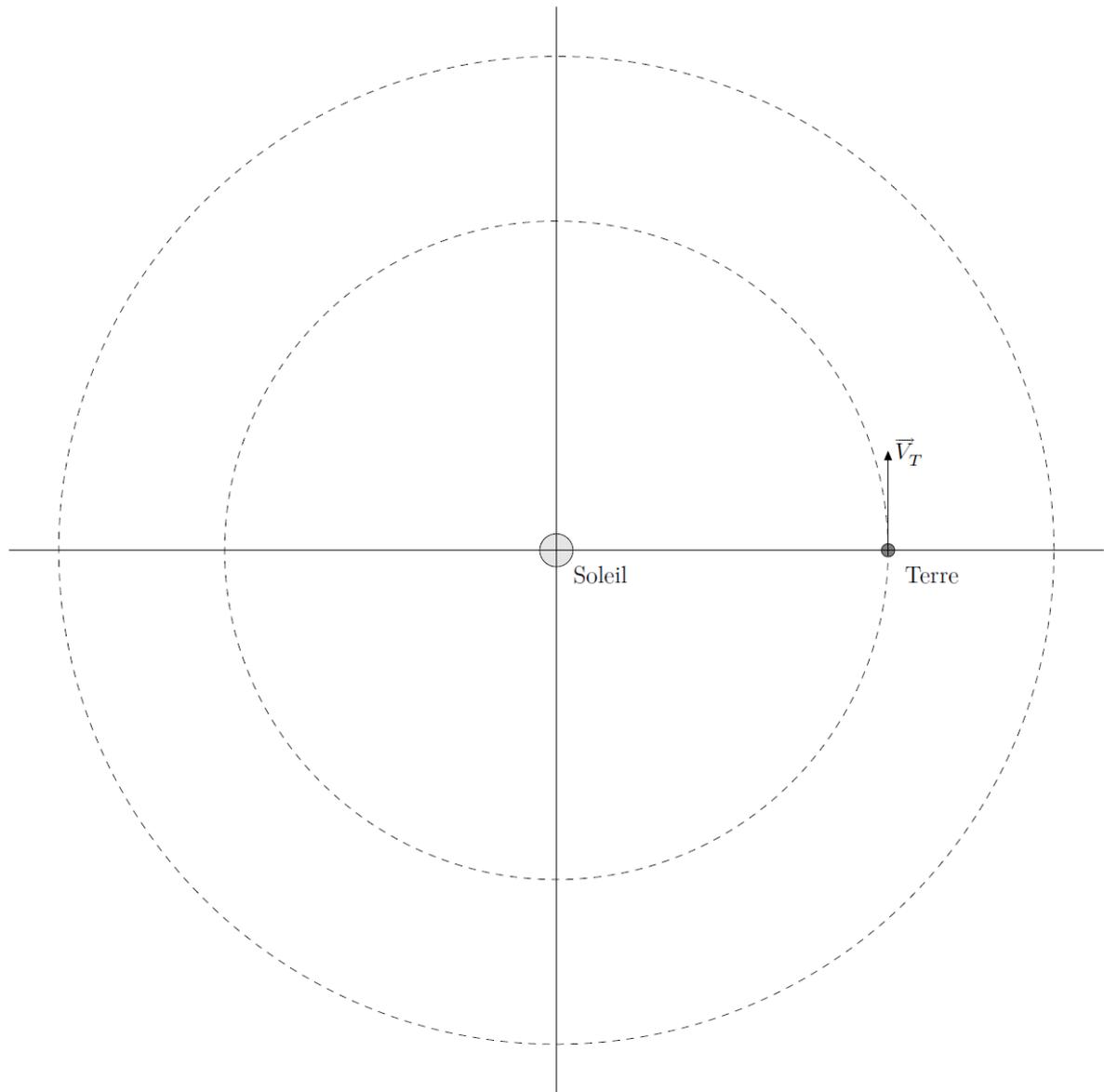


Figure A

NOM :

Prénom :

Questions 14 et 16

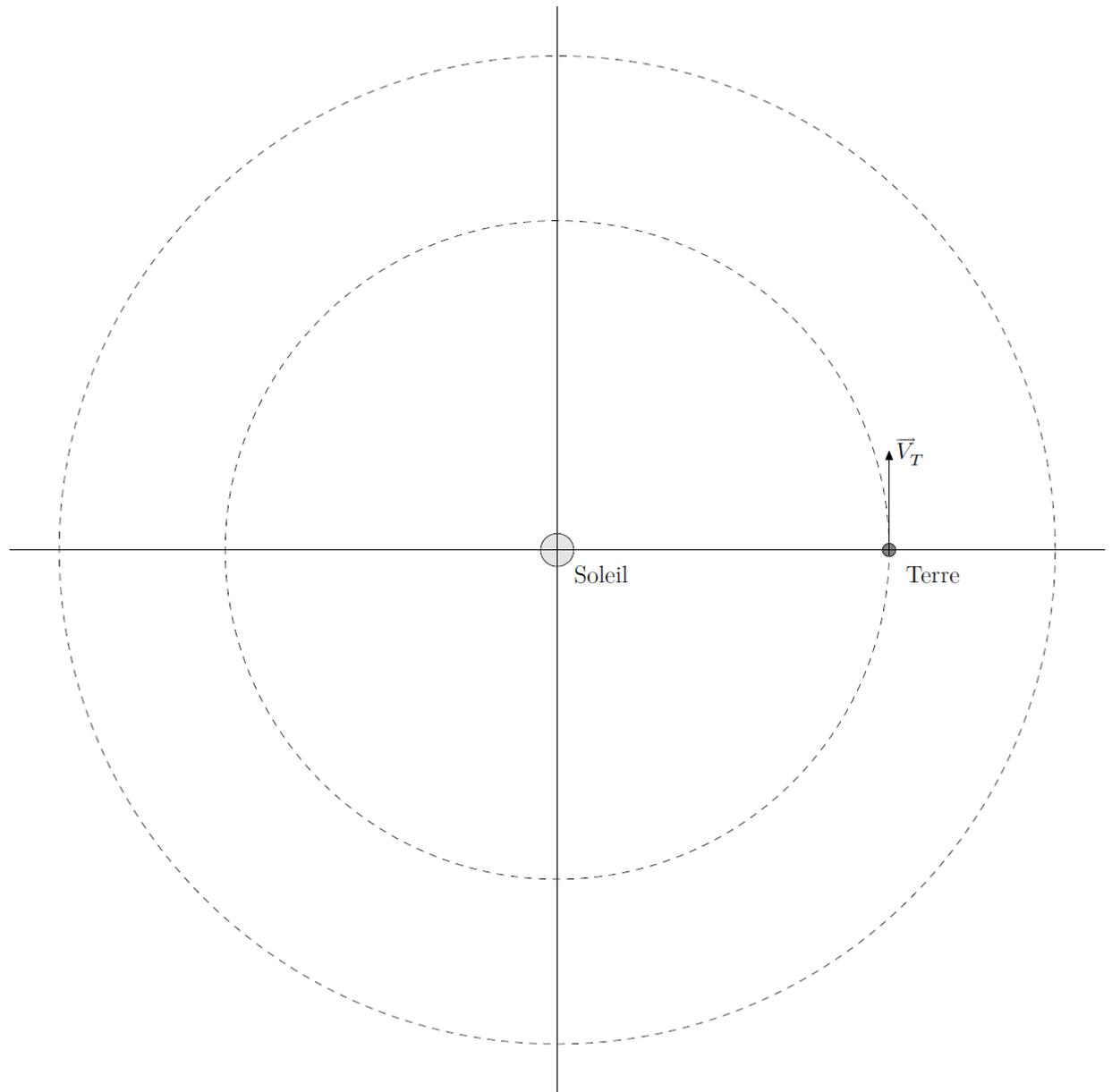


Figure B