

Correction - DS 2bis (Centrale - Mines)

1 Pendule de Foucault (d'après ENS - PC - 2022)

1.1 Mouvement du pendule sans effet de la force de Coriolis

1. Le poids est la somme de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement :
- $$\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{F}_{ie}.$$

Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, la force de gravitation exercée par la Terre sur le point M (que l'on suppose être au voisinage de O) a pour expression

$$\vec{F}_g = -\frac{GM_T m}{R_T^2} \vec{e}_z$$

Dans cette même base, la force d'inertie d'entraînement a pour expression

$$\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 \overrightarrow{HM} = m\Omega^2 R_t (\cos^2 \lambda \vec{e}_z - \cos \lambda \sin \lambda \vec{e}_y)$$

avec $\Omega \approx 2\pi / (24 \times 3600) \approx 7.10^{-5}$ rad/s. Comme $\|\overrightarrow{HM}\| = R_T \cos(\lambda)$, il vient :

$$\frac{\|\vec{F}_{ie}\|}{\|\vec{F}_g\|} = \frac{\Omega^2 \cos(\lambda) R_T^3}{GM_T} \leq \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T} \approx 3 \times 10^{-3} \ll 1$$

Ainsi $\|\vec{F}_{ie}\| \ll \|\vec{F}_g\|$.

Par ailleurs, la tangente de l'angle α formé par les vecteurs \vec{e}_z et le poids $\vec{P} = \vec{F}_{ie} + \vec{F}_g \approx -\frac{GM_T m}{R_T^2} \vec{e}_z - m\Omega^2 R_T \cos(\lambda) \sin(\lambda) \vec{e}_y$ est donnée par :

$$|\tan(\alpha)| \simeq |\alpha| = \left| \frac{P_y}{P_z} \right| = \frac{\Omega^2 R_t^3}{GM_t} \cos \lambda \sin \lambda \simeq 1,5 \times 10^{-3} \text{ rad} \ll 1$$

Le poids \vec{P} est donc quasi-parallèle au vecteur \vec{e}_z et de norme quasiment égale à celle de la force de gravitation. Il est donc légitime de négliger la force d'inertie d'entraînement par rapport à la force de gravitation.

Par ailleurs, étant donné que la masse restera tout au long du mouvement au voisinage du point O , on pourra écrire que $F_g = -g\vec{e}_z$, avec $g = \frac{GM_t}{R_t^2} \simeq 10 \text{ m.s}^{-2}$.

2. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen (puisqu'on l'on néglige toutes les forces d'inertie), seules deux forces s'exercent sur la masse m : son poids et la force de tension ($\vec{T} = -T\vec{e}_r$) du fil. Par application de la deuxième loi de Newton à la masse m , on a

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$

Après projection, on obtient le système

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\alpha}^2 &= mg \cos \alpha - T \\ m\ell\ddot{\alpha} &= -mg \sin \alpha \end{cases}$$

3. Si $\alpha \ll 1$, alors $\sin \alpha \ll 1$ et l'équation du mouvement est bien celle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{\ell} \alpha = 0$$

Par identification, on a directement

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

La période d'oscillation est

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \simeq 15 \text{ s} \quad .$$

4. Pour un angle α_{\max} , la variation maximale d'altitude est $\Delta z = \ell(1 - \cos \alpha_{\max}) = \ell \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha_{\max}^2}{2} + o(\alpha_{\max}) \right) \right] = \ell \frac{\alpha_{\max}^2}{2} + o(\alpha_{\max}^2)$ tandis que la variation de position horizontale est $\Delta x = \ell \sin \alpha_{\max} = \ell \alpha_{\max} + o(\alpha_{\max})$. Donc au premier ordre en α_{\max} , le mouvement est bien horizontal.

1.2 Effet de la force de Coriolis

5. La pulsation Ω correspond à la rotation sidérale de la Terre avec une période $J \simeq 1$ jour, donc $\Omega = 2\pi/J \simeq 7 \times 10^{-5}$ rad/s $\ll \omega_0$.
6. $\vec{e}_3 = \cos \lambda \vec{e}_y + \sin \lambda \vec{e}_z$, donc la force de Coriolis a pour expression

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = 2m\Omega [\sin(\lambda)y\vec{e}_x - \sin(\lambda)x]\vec{e}_y$$

en négligeant la composante selon z .

L'application de la deuxième loi de Newton à la masse m dans le référentiel terrestre conduit directement au système indiqué par l'énoncé en posant $\tilde{\Omega} = \Omega \sin(\lambda)$.

7. L'équation différentielle vérifiée par u est

$$\ddot{u} + 2i\tilde{\Omega}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

dont les racines de l'équation caractéristique sont

$$r_{\pm} = i \left(\pm \sqrt{\omega_0^2 + \tilde{\Omega}^2} - \tilde{\Omega} \right)$$

La solution générale de cette équation différentielle est donc

$$u = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t)$$

où A et B sont deux constantes d'intégration complexes.

8. En raison des conditions initiales choisies A et B vérifie le système

$$\begin{cases} A + B = x_0 \\ r_+ A + r_- B = 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$A = \frac{r_-}{r_- - r_+} x_0 \quad \text{et} \quad B = \frac{r_+}{r_+ - r_-} x_0$$

On en déduit que

$$u = x_0 \frac{[r_+ \exp(r_- t) - r_- \exp(r_+ t)]}{r_+ - r_-}$$

9. Sachant que $\tilde{\Omega} \ll \omega_0$, on peut effectuer les approximations suivantes

$$r_{\pm} \simeq i \left(\pm \omega_0 - \tilde{\Omega} \right)$$

$$A \simeq B \simeq \frac{x_0}{2}$$

On en déduit une expression simplifiée de u :

$$u \simeq x_0 \cos(\omega_0 t) \exp(-i\tilde{\Omega}t)$$

Ainsi, la position de la masse est donnée à tout instant par le vecteur

$$\overrightarrow{OM} = x_0 \cos(\omega_0 t) \underbrace{\left[\cos(\tilde{\Omega}t)\vec{e}_x - \sin(\tilde{\Omega}t)\vec{e}_y \right]}_{\vec{u}(t)}$$

en notant O le point le plus bas de la trajectoire de la masse. Le vecteur \vec{u} est un vecteur unitaire tournant à la vitesse angulaire $\tilde{\Omega} \ll \omega_0$ dans le sens indirect par rapport au vecteur \vec{e}_z . Ainsi, à tout instant on peut définir un plan d'oscillation instantané par $(O, \vec{e}_z, \vec{u}(t))$. Le pendule oscille donc à la pulsation ω_0 comme dans le cas où l'on ne tient pas compte de la force de Coriolis, mais le plan des oscillations tourne dans le sens indirect autour de (O, \vec{e}_z) à la vitesse angulaire $\tilde{\Omega}$.

10. Directement, $\psi = -\tilde{\Omega}T = -2\pi \sin(\lambda) \simeq -250^\circ$. Pour que le plan d'oscillation revienne à sa position initiale au bout de 24 heures, il faut que $\psi = 0[2\pi]$, ce qui impose $\lambda = 0$, ce qui correspond à tous les points situés à l'équateur.
11. Plus la longueur est grande, plus la période est grande, plus la vitesse du pendule est faible et plus faibles seront les frottements. Plus la masse est grande et plus les frottements seront faibles par rapport au poids (pour une même géométrie de la masse). L'intérêt d'avoir une grande longueur et une grande masse est de minimiser les frottements pour que le pendule ait le temps d'osciller assez longtemps pour que le phénomène de rotation du plan d'oscillation soit visible.
12. Avec un tel pendule, notamment tenu à la main, les oscillations s'amortiront bien avant que l'on puisse détecter la moindre rotation du plan (qui, si elle est mesurable, permet de renseigner sur la latitude du point où se déroule l'expérience). Le professeur Tournesol ne peut donc absolument pas s'orienter à l'aide de son pendule.

2 Programme d'exploration de Mars de la NASA (d'après Centrale-Supélec - PC - 2022)

I. Le voyage entre la Terre et Mars :

Q1. $m_1 a = G m_1 m_2 / r^2$ donc les dimensions de G sont : $L^3.M^{-1}.T^{-2}$, soit en SI : $[G] = m^3.s^{-2}.kg^{-1}$.

Q2. Cours

Q3. Cours, $\vec{L}_o = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mC\vec{e}_z$ d'où $C = L_o / m$: constante des aires.

Q4. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'objet en orbite circulaire autour du soleil s'écrit en projection sur \vec{e}_r :

$$m \frac{V^2}{R} = G \frac{mM_S}{R^2} \text{ d'où } V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}$$

$$AN : V_T = \sqrt{G \frac{M_S}{R_T}} = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{2 \cdot 10^{30}}{150 \cdot 10^9}} = 2,98 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1} \text{ (on prend } R_T = a_T)$$

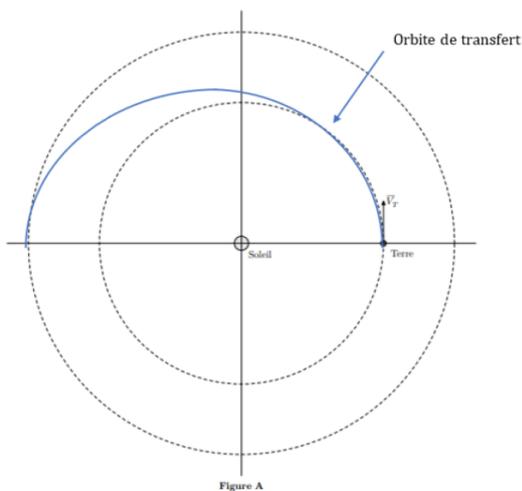
$$V_M = \sqrt{G \frac{M_S}{R_M}} = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{2 \cdot 10^{30}}{228 \cdot 10^9}} = 2,42 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1} \text{ (on prend } R_M = a_M)$$

Q5. $E_c = \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} G \frac{mM_S}{R}$; $E_p = -G \frac{mM_S}{R}$; $E_m = -G \frac{mM_S}{2R}$

Q6. $V = \frac{2\pi R}{T}$ d'où $T = \frac{2\pi R}{V} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_S}}$

3è loi de Képler $T^2 / R^3 = 4\pi^2 / GM_S$

Q7.



Q8. Le vaisseau est sur une orbite elliptique telle que :

$$2a = a_T + a_M.$$

L'énergie mécanique du vaisseau sur cette orbite est :

$$E_m = -G \frac{mM_S}{a_T + a_M}$$

En $r = R_T = a_T$:

$$E_m = E_c(R_T) + E_p(R_T) = \frac{1}{2} mV_T'^2 - G \frac{mM_S}{a_T}$$

avec $GM_S = a_T V_T^2$, d'où :

$$\frac{1}{2} mV_T'^2 - mV_T^2 = -G \frac{mM_S}{a_T + a_M}$$

$$\text{D'où } V_T'^2 = 2V_T^2 - 2G \frac{M_S}{a_T + a_M}$$

$$V_T'^2 = 2V_T^2 - 2 \frac{a_T}{a_T + a_M} V_T^2$$

$$\text{Soit } V_T' = V_T \sqrt{2 \left(1 - \frac{a_T}{a_T + a_M}\right)} = V_T \sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}}$$

$$\text{Et } \Delta V_T = V_T \left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}} - 1 \right) = 2,98 \cdot 10^4 \left(\sqrt{2 \left(\frac{228}{150 + 228} \right)} - 1 \right) = 2,93 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

Q9. Pour aller de la terre à Mars, le vaisseau parcourt une demi-ellipse, il mettra donc une demi-période : $\Delta t = T/2 = \pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_S}} = \pi \sqrt{\frac{((150+228)/2)^3 \cdot 10^{27}}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}} = 2,23 \cdot 10^7 \text{ s} = 259 \text{ jours}$ (inférieur à $T_M = 687 \text{ jours}$)

Q10. Au moment de l'arrivée du vaisseau $\theta_V(\Delta t) = \theta_M(\Delta t) = \pi$ et à l'instant initial θ_{M_0} , tel que $\theta_M(\Delta t) - \theta_{M_0} = \Omega_M \cdot \Delta t$ où $\Omega_M = V_M / a_M$ la vitesse de rotation de Mars sur son orbite, supposée circulaire. $\theta_M(\Delta t) - \theta_{M_0} = V_M \cdot \Delta t / a_M = 2,42 \cdot 10^4 \cdot 2,23 \cdot 10^7 / 228 \cdot 10^9 = 2,37 \text{ rad}$
 D'où $\theta_{M_0} = \pi - 2,37 = 0,775 \text{ rad} = 0,775 \cdot 180 / \pi = 44,4^\circ = \alpha_0$

Q11. Lorsque le vaisseau parcourt toute l'ellipse de transfert, il s'est écoulé une période :
 $T = 4,46 \cdot 10^7 \text{ s} = 518 \text{ j} = 1 \text{ an} + 153 \text{ j}$
 La Terre a donc fait une révolution complète sur son orbite
 D'où $\theta_T(T) = 360 \cdot 153 / 365 = 151^\circ$

Le vaisseau ne sera pas en phase avec la terre lorsqu'il atteint l'orbite terrestre...

Q12. Après son départ de Mars, le vaisseau rejoint toujours l'orbite terrestre en Δt , pendant que la Terre doit parcourir un angle $\pi + \alpha_1$ à vitesse angulaire $2\pi/T_T$, soit :

$$\Delta t = T_T \frac{\pi + \alpha_1}{2\pi} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2\pi \Delta t}{T_T} - \pi = 1,32 \text{ rad} = 75^\circ$$

Q13. Soit $t = 0$ l'instant du lancement depuis l'orbite terrestre. L'angle entre Mars et la terre est :

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{2\pi}{T_M} t - \frac{2\pi}{T_T} t$$

La mission sur Mars se termine à l'instant t_1 tel que :

$$\alpha(t_1) = \alpha_1 + 2n\pi \text{ avec } n \text{ entier relatif}$$

Remarque : la terre tournant plus vite que Mars, l'angle $\alpha(t)$ va rapidement devenir négatif, donc n sera négatif.

On en déduit :

$$t_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 + 2n\pi}{\frac{2\pi}{T_T} - \frac{2\pi}{T_M}} = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 + 2n\pi}{2\pi} \frac{T_T T_M}{T_T - T_M}$$

La première valeur positive de t_1 est obtenue pour $n = -1$:

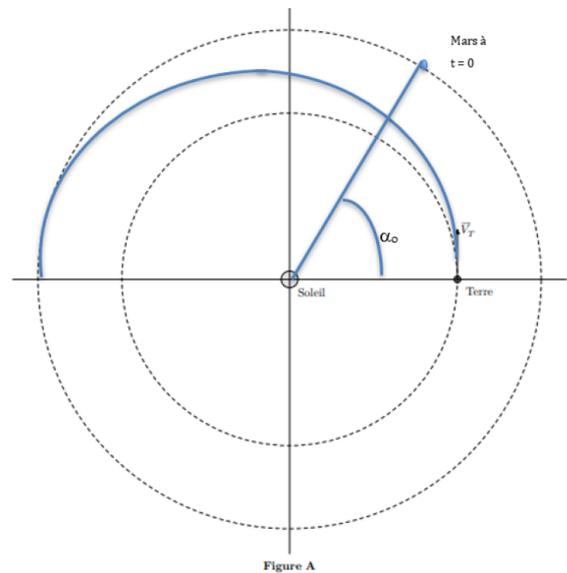
$$t_1 = 712 \text{ jours}$$

On doit soustraire la durée du voyage aller, donc la durée de la mission sur Mars est :

$$\Delta t_{Mars} = 712 - 259 = 453 \text{ jours}$$

La durée totale de la mission est :

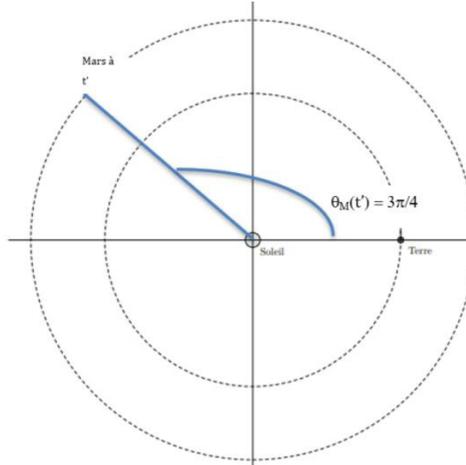
$$\Delta t_{totale} = 712 + 259 = 970 \text{ jours}$$



La période $\Delta t_{attente}$ entre deux fenêtres de lancement est la période relative entre la Terre et Mars, soit

$$\Delta t_{attente} = \frac{2\pi}{\omega_T - \omega_M} = \frac{T_T T_M}{T_M - T_T} = 779 \text{ jours}$$

Q14.



Q15. L'orbite proposée est une ellipse, et la vitesse initiale est perpendiculaire à l'axe soleil-terre, or en polaire $\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et si \vec{v} est perpendiculaire à l'axe terre-soleil $\dot{r} = 0$, donc r est un extremum, en l'occurrence un minimum, donc $r_p = a_T$.

Q16. En $\theta = 0$ $r_p = p / (1+e) = a_T$
 En $\theta = 3\pi/4$ $r = p / (1 - e/\sqrt{2}) = a_M$

d'où $e = \frac{a_M - a_T}{\frac{a_M}{\sqrt{2}} + a_T} = \frac{228 - 150}{\frac{228}{\sqrt{2}} + 150} = 0,251$.

L'aphélie se trouve en $\theta = \pi$
 $r_a = p / (1 - e) = a_T (1+e) / (1 - e)$ avec $p = a_T(1+e)$
 $= a_T * 1,251 / 0,749 = 1,67 a_T$

Q17. Pour cette ellipse
 $2a = r_p + r_a = a_T \left(1 + \frac{1+e}{1-e}\right) = a_T \left(\frac{2}{1-e}\right)$

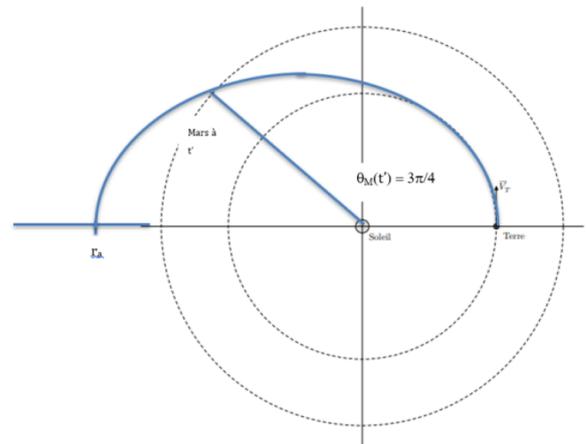
Et d'après Q8

$E_m = -G \frac{mM_S}{2a} = -ma_T V_T^2 (1-e) / 2a_T = -m V_T^2 (1-e) / 2$
 Avec $GM_S = a_T V_T^2$

Q18 Toujours d'après Q8 en $r = r_p = a_T$ $E_m = E_c(a_T) + E_p(a_T) = \frac{1}{2} m V_T'^2 - G \frac{mM_S}{a_T}$
 $= \frac{1}{2} m V_T'^2 - m V_T^2$
 $V_T' = V_T \sqrt{1+e} = 3,34 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}$

Q19. $\Delta V_T' = V_T' - V_T = V_T (\sqrt{1+e} - 1) = 2,98 \cdot 10^4 \cdot (\sqrt{1+0,251} - 1) = 3,53 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$

Q20. $C = L_o/m = a_T V_T'$



Q21. $dt = r^2 d\theta / C$ d'où

$$\Delta t' = \frac{1}{C} \int_0^{3\pi/4} \frac{a_T^2(1+e)^2}{(1+e \cdot \cos\theta)^2} d\theta = \frac{a_T(1+e)^2}{v''_T} * 2,15 = 150 \cdot 10^9 \frac{(1+0,251)^2}{3,34 \cdot 10^4} * 2,15 = 1,51 \cdot 10^7 \text{s} = 175 \text{ jours}$$

La durée du transfert a été raccourcie de $259 - 175 = 84$ jours.

3 Expérimenter avec un morceau de scotch (d'après Centrale MP 2017)

I.B.1) Ce référentiel est bien galiléen car il est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre que l'on suppose galiléen.

I.B.2) Nous avons : $\ell(t) = x_I(t) - x_L(t)$ où I est entraîné à la vitesse constante $\vec{V}_p = V_p \vec{u}_x$. D'après les conditions initiales : $\ell(0) = \ell_0 \implies x_I(0) = \ell_0$, ce qui conduit à :

$$x_I(t) = V_p t + \ell_0$$

soit :

$$\boxed{\ell(t) = V_p t + \ell_0 - x_L(t)}$$

I.B.3) Initialement le ressort n'est ni étiré, ni comprimé et la masse m est sans vitesse initiale. Nous pouvons donc faire l'hypothèse d'une première phase dans laquelle il y a absence de glissement, ce qui sera à vérifier ensuite. La masse reste donc en $x_L = 0$ avec une vitesse nulle. Le principe fondamental de la dynamique, projeté sur \vec{u}_x conduit à :

$$f + k(\ell(t) - \ell_0) = 0 \iff f = -k V_p t$$

ce qui n'est possible que si : $|f| < F_p$ et donc :

$$\boxed{t < \frac{F_p}{kV_p} = t_0}$$

Il y a donc bien une phase de non-glissement qui s'étend de $t = 0$ à $t = t_0$.

I.B.4) Pour $t \geq t_0$, la masse m se déplace dans le sens $+\vec{u}_x$ et la force de frottement s'écrit donc : $\vec{f} = -|f|\vec{u}_x = -(1-\varepsilon)F_p\vec{u}_x$. Le principe fondamental de la dynamique conduit alors à :

$$m\ddot{x}_L = -(1-\varepsilon)F_p + k(V_p t - x_L)$$

soit :

$$\ddot{x}_L + \frac{k}{m}x_L = \frac{k}{m}V_p t - (1-\varepsilon)\frac{F_p}{m}$$

Il est donc possible d'introduire la pulsation propre caractéristique d'un système {masse - ressort} :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

d'où :

$$\boxed{\ddot{x}_L + \omega_0^2 x_L = \omega_0^2 V_p t - (1-\varepsilon)\frac{F_p}{m}}$$

I.B.5) Remplaçons d'abord t par $t' + t_0$ dans l'équation différentielle. En utilisant le fait que $kV_p t_0 = F_p$, nous obtenons :

$$\ddot{x}_L + \omega_0^2 x_L = \omega_0^2 V_p t' + \varepsilon \frac{F_p}{m}$$

C_3 provient de la solution particulière et vaut :

$$\boxed{C_3 = \frac{\varepsilon F_p}{m\omega_0^2} = \frac{\varepsilon F_p}{k}}$$

Quant à C_1 et C_2 , elles sont déterminées par les conditions initiales en $t' = 0$, à savoir :

$$x_L(0) = C_1 + C_3 = 0 \implies C_1 = -C_3 = -\frac{\varepsilon F_p}{k}$$

et

$$\dot{x}_L(0) = \omega_0 C_2 + V_p = 0 \implies C_2 = -\frac{V_p}{\omega_0}$$

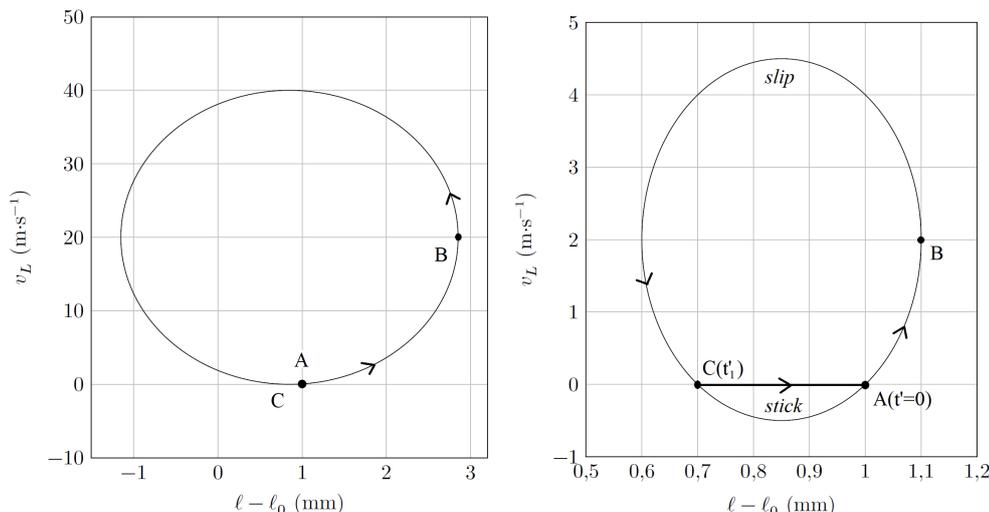
I.B.6)

a) On remarque d'abord, en utilisant le résultat de la question **I.B.2)** que :

$$\begin{aligned} \ell(t') - \ell_0 &= V_p(t_0 + t') - x_L(t') = V_p t_0 + V_p t' - x_L(t') \\ &= \frac{F_p}{k} + \frac{\varepsilon F_p}{k} \cos(\omega_0 t') + \frac{V_p}{\omega_0} \sin(\omega_0 t') - \frac{\varepsilon F_p}{k} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $V_p t_0 = \frac{F_p}{k}$.

À l'instant $t' = 0$, $\ell(0) - \ell_0 = \frac{F_p}{k} = 1$ mm et $v_L(0) = 0$, ce qui permet de placer le point initial A sur les deux portraits de phase.



Juste après $t = t_0$, c'est à dire juste après $t' = 0$, la masse commence à glisser et accélère, mais elle avance plus lentement que le chariot. En effet, au début du mouvement, dans les deux courbes de gauche de l'annexe, la courbe en trait plein représentant la position x_L de la masse est située au-dessous de la courbe en pointillés représentant la position du chariot $x_{chariot} = V_p * t'$. On en déduit que le ressort commence par une phase d'élongation¹, et que $\ell(t) - \ell_0$ augmente. Le mouvement se fait donc dans le sens trigonométrique pour le portrait de phase.

b) Dans la **Figure A**, la vitesse v_L s'annule en $t' = t'_1$ au point C sur la figure ci-dessous. La masse s'arrête et on parle de phase "stick". La condition pour que la masse se remette à glisser (phase "slip") a déjà été calculée, et correspond à la même longueur $\ell(t) - \ell_0$

1. On notera que cette phase d'élongation s'arrête au niveau du point B de la figure ci-dessous. Juste après cet instant, la vitesse de la masse est supérieure à celle du chariot et $\ell(t) - \ell_0$ diminue.

qu'initialement, c'est à dire au point A . La partie du portrait de phase $v_L < 0$ est donc non physique (cf question d'après). La première phase de "stick" s'étend d'environ $t'_1 = 3\pi/(2\omega_0)$ à un peu moins de $t'_2 = 2,25\pi/\omega_0$.

Dans la **Figure B**, la vitesse v_L s'annule en $t' = t'_1$ au même point A qu'à $t' = 0$. La masse repart donc immédiatement et il n'y a pas de phase de "stick". La phase "slip" perdure indéfiniment.

- c) Seules les courbes de la **Figure A** sont non physiques, car elles ne tiennent pas compte de la phase "stick". On les a modifiées ci-dessous.

