Corrigé du DM n°4

1 Décomposition du monoxyde d'azote

II Décomposition du monoxyde d'azote

1. D'après la loi des gaz parfaits, on sait que la pression partielle en NO(g) vérifie :

$$p = [NO]RT \implies \text{à } t=0 \quad [NO]_0 = \frac{p_0}{RT}$$

$[NO]_0$ en $mol.m^{-3}$; p_0 en Pa ; T en K

mais attention aux unités !!

On peut donc dresser le tableau ci-dessous dans lequel la concentration initiale a été convertie en $mol.L^{-1}$, unité plus adaptée en chimie.

$[NO]_0$ ($mol.L^{-1}$)	$1{,}11.10^{-3}$	$1{,}67.10^{-3}$	$2{,}22.10^{-3}$	$3{,}33.10^{-3}$	$4{,}44.10^{-3}$
v_0 ($mol.L^{-1}.min^{-1}$)	$1{,}4.10^{-4}$	$3{,}0.10^{-4}$	$5{,}5.10^{-4}$	$1{,}2.10^{-3}$	$2{,}3.10^{-3}$

La loi de vitesse s'écrit : $v = k[NO]^a$ donc, à $t=0$, $v_0 = k[NO]_0^a \iff \ln v_0 = a \ln[NO]_0 + \ln k$. On doit donc vérifier que $\ln v_0$ est une fonction affine de $\ln[NO]_0$. Le coefficient directeur de la droite sera l'ordre a de la réaction.

Régression linéaire : on obtient un coefficient de corrélation $|r| = 0{,}9996 > 0{,}99$ ce qui valide la loi et on en déduit :

$$\boxed{a = 2} \quad \text{Valeur entière la plus proche}$$

2. La régression linéaire donne l'ordonnée à l'origine de la droite : $\ln k = 4{,}786$ d'où

$$k = 1{,}2.10^{2}\ L.mol^{-1}.min^{-1}$$

Cette valeur numérique est concordante avec les valeurs du tableau donnant les constantes k en fonction de θ.

3. $-\frac{1}{2}\frac{d[NO]}{dt} = k[NO]^2$. On en déduit que

$$\int_{[NO]_0}^{[NO](t)} \frac{d[NO]}{[NO]^2} = -2k\int_0^t dt$$

donc

$$-\frac{1}{[NO](t)} + \frac{1}{[NO]_0} = -2kt$$

d'où

$$\underline{[NO](t) = \frac{[NO]_0}{1+[NO]_0 2kt}}$$

4. Au temps de demi-réaction, nous avons : $[NO](\tau_{1/2}) = [NO]_0/2$ et donc :

$$\frac{2}{[NO]_0} - \frac{1}{[NO]_0} = 2k\tau_{1/2} \iff \underline{\tau_{1/2} = \frac{1}{2k[NO]_0}}$$

AN A 1057°C, $k = 28\ \mathrm{L\,mol^{-1}\,min^{-1}}$ et pour $p_0 = 200$ mmHg nous avons $[NO]_0 = 2{,}22.10^{-3}\ \mathrm{mol.L^{-1}}$, d'où :

$$\underline{\tau_{1/2} = 8{,}0 \text{ minutes}}$$

5. $k(T) = A e^{-E_a/RT}$ où A est le facteur préexponentiel et E_a l'énergie d'activation. On en déduit

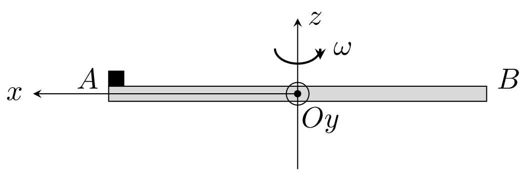
$$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{R}\frac{1}{T} \longrightarrow \ln k \text{ fonction affine de } \frac{1}{T}$$

Une régression linéaire sur les 3 valeurs du tableau donne un coefficient de corrélation $|r| = 0{,}9999\ldots > 0{,}99$ ce qui valide la loi et :

$$\underline{E_a = 245\ \mathrm{kJ.mol^{-1}}}$$

2 Glissement d'une gomme sur une barre en mouvement

I. L'axe de rotation de la barre est vertical



1) Étudions la gomme de masse m dans le référentiel de la barre ($\mathscr{R}_b$) non galiléen et muni du repère d'espace ($Oxyz$). En l'absence de glissement, la gomme est immobile dans ce référentiel.

Bilan des forces (BDF) :

- Poids : $m\overrightarrow{g} = -\,mg\,\overrightarrow{e_z}$
- Réaction normale exercée par la barre : $\overrightarrow{N} = N\,\overrightarrow{e_z}$
- Réaction tangentielle exercée par la barre $\overrightarrow{T} = T_x\,\overrightarrow{e_x} + T_y\,\overrightarrow{e_y}$

  Il faut faire attention au fait que $\overrightarrow{T}$ est dans le plan tangent au support et possède donc ici deux composantes T_x et T_y.
- Force d'inertie d'entraînement : $\overrightarrow{F_{ie}} = m\omega^2 L\,\overrightarrow{e_x}$ (on néglige l'épaisseur de la barre et la gomme est supposée ponctuelle)
- La force d'inertie de Coriolis est nulle puisque la gomme est immobile dans $(\mathscr{R}_b)$.

Principe fondamental de la dynamique (PFD) projeté dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$:

$$\overrightarrow{0} = -\,mg\,\overrightarrow{e_z} + T_x\,\overrightarrow{e_x} + T_y\,\overrightarrow{e_y} + N\,\overrightarrow{e_z} + m\omega^2 L\,\overrightarrow{e_x}$$

d'où :

$$\left\{\begin{array}{lcl} T_x & = & -\,m\omega^2 L \\ T_y & = & 0 \\ N & = & mg \end{array}\right.$$

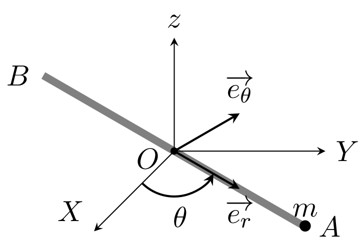
L'absence de glissement ne peut persister que si :

$$\frac{\|\overrightarrow{T}\|}{\|\overrightarrow{N}\|} < f_s \iff \frac{\omega^2 L}{g} < f_s \quad \text{d'où} \quad \omega < \sqrt{\frac{f_s g}{L}}$$

On a donc :

$$\boxed{\omega_m = \sqrt{\frac{f_s g}{L}} \overset{AN}{=} 2\,\text{rad.s}^{-1} = \ 0{,}3 \text{ tour.s}^{-1}}$$

2) On reprend la figure du texte :



a) Étudions le système { barre + gomme } dans le référentiel terrestre $(\mathscr{R}_T)$ supposé galiléen. Il est intéressant d'introduire la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ (qui est d'ailleurs confondue avec $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$) pour projeter les relations vectorielles.

Le moment cinétique du système { barre + gomme } est la somme des moments cinétiques :

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{L_O}(\text{barre}) + \overrightarrow{L_O}(\text{gomme})$$

avec $\overrightarrow{L_O}(\text{barre}).\overrightarrow{e_z} = J\dot{\theta}$ et :

$$\overrightarrow{L_O}(\text{gomme}) = \overrightarrow{OA} \wedge m\,\overrightarrow{v}_{A/\mathscr{R}_T} = L\,\overrightarrow{e_r} \wedge mL\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} = mL^2\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$$

d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{L_O}.\overrightarrow{e_z} = (J + mL^2)\,\dot{\theta}}$$

Remarque :

On aurait pu écrire ce résultat directement en remarquant que le système { barre + gomme } forme un solide en rotation autour de l'axe fixe Oz et dont le moment d'inertie par rapport à Oz est égal à $J + mL^2$.

BDF <u>externes</u> appliquées au système :

- Liaison pivot parfaite : $\overrightarrow{M_O}(\text{pivot}) \perp \overrightarrow{e_z}$
- Poids de la barre : $\overrightarrow{M_O}(\text{poids barre}) = (\overrightarrow{OG_b} \wedge M\overrightarrow{g}) \perp \overrightarrow{e_z}$
- Poids de la gomme : $\overrightarrow{M_O}(\text{poids gomme}) = (\overrightarrow{OA} \wedge M\overrightarrow{g}) \perp \overrightarrow{e_z}$.
- Moment exercé par le ressort spiral : $\overrightarrow{M_O}(\text{rs}) = -C\,\theta\,\overrightarrow{e_z}$

On applique le théorème du moment cinétique (TMC) en projection sur $\overrightarrow{e_z}$

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} = -C\,\theta \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{3C}{(M+3m)L^2}\,\theta = 0}$$

Il s'agit d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\Omega = \sqrt{\frac{3C}{(M+3m)L^2}}$. On a donc :

$$\theta(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$$

et les conditions initiales entraînent : $A = \theta_0$ et $B = 0$ d'où :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\Omega t)}$$

b) Étudions la gomme dans le référentiel de la barre ($\mathscr{R}_b$) non galiléen. Celui-ci est en rotation **non uniforme** autour de l'axe Oz (fixe dans $\mathscr{R}_T$) avec un vecteur rotation $\overrightarrow{\omega} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$.

BDF :

- Le poids $-mg\,\overrightarrow{e_z}$
- La réaction normale de la barre $\overrightarrow{N} = N\,\overrightarrow{e_z}$
- La réaction tangentielle de la barre $\overrightarrow{T} = T_x\,\overrightarrow{e_x} + T_y\,\overrightarrow{e_y}$
- La force d'inertie d'entraînement :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_{ie}} = -m\,\overrightarrow{a_e} &= -m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{OA} - m\,\overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}) \\
&= -\,m\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_z} \wedge\, L\,\overrightarrow{e_x} + m\,\dot{\theta}^2\,L\,\overrightarrow{e_x} \\
&= -mL\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_y} + m\,\dot{\theta}^2\,L\,\overrightarrow{e_x}
\end{aligned}$$

- La force d'inertie de Coriolis est toujours nulle puisque la gomme est immobile dans ($\mathscr{R}_b$).

PFD projeté sur la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
T_x &=& -\,mL\,\dot{\theta}^2 = -\,mL\Omega^2\,\theta_0^2\,\sin^2(\Omega t) \\
T_y &=& mL\ddot{\theta} = -mL\Omega^2\,\theta_0\cos(\Omega t) \\
N &=& mg
\end{array}\right.$$

c) On a donc :

$$\|\overrightarrow{T}\| = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = mL\Omega^2\,\theta_0\,\sqrt{\theta_0^2\sin^4(\Omega t) + \cos^2(\Omega t)} = mL\Omega^2\theta_0\sqrt{\theta_0^2\,y^2 - y + 1}$$

Comme les variations de $\|\overrightarrow{T}\|$ sont celles de la fonction $f : y \longmapsto \theta_0^2\,y^2 - y + 1$, nous allons étudier f qui est définie sur l'intervalle $[0, 1]$. Nous avons :

$$\forall\, y \in [0, 1],\ \ f'(y) = 2\,\theta_0^2\,y - 1$$

Le tableau des variations de f s'écrit :

$$\begin{array}{c|ccccc}
y & 0 & & \dfrac{1}{2\theta_0^2} & & 1 \\
\hline
f'(y) & & - & 0 & + & \\
\hline
f(y) & 1 & \searrow & 1 - \frac{1}{4\theta_0^2} & \nearrow & \theta_0^2
\end{array}$$

On veut que la gomme reste toujours sans glisser sur la barre, c'est à dire pour tout t et donc pour tout $y \in [0, 1]$. On peut formaliser cela de la façon suivante :

$$\forall\, y \in [0, 1],\ \ \frac{\|\overrightarrow{T}\|}{\|\overrightarrow{N}\|} < f_s \iff \theta_0\,\sqrt{f(y)} < \frac{f_s g}{L\Omega^2}$$

Ceci sera réalisé si et seulement si :

$$\theta_0 \max_{y\in[0,1]} \sqrt{f(y)} < \frac{f_s g}{L\Omega^2}$$

Or :

$$\theta_0 \max_{y\in[0,1]} \sqrt{f(y)} = \theta_0 \max(1, \theta_0) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\theta_0 \max(1, \theta_0) < \frac{f_s g}{L\Omega^2}} \qquad (*)$$

Il s'ensuit la discussion suivante :

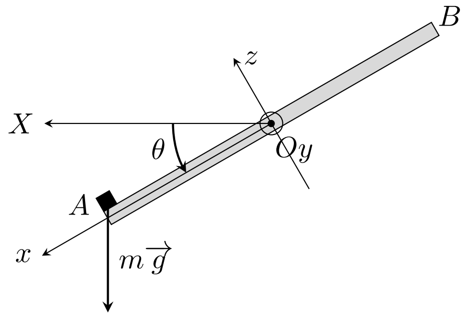
- Si $\theta_0 < 1$ alors (*) implique que la gomme ne glisse pas si $\theta_0 < \dfrac{f_s g}{m\Omega^2}$.
- Si $1 < \theta_0$ alors la gomme ne glisse pas si $\theta_0 < \sqrt{\frac{f_s g}{L\Omega^2}}$, ce qui n'est possible que si $1 < \dfrac{f_s g}{L\Omega^2}$.

Application numérique : $\Omega = 1{,}17$ rad.s^{-1} $\Longrightarrow \dfrac{f_s g}{L\Omega^2} = 3{,}37$. On en déduit que l'angle initial maximum est :

$$\theta_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{f_s g}{L\Omega^2}} = 1{,}69 \text{ rad} \ = \ 97°$$

II. L'axe de rotation de la barre est horizontal

La barre est maintenant en rotation autour de l'axe horizontal Oy fixe dans le référentiel terrestre (la liaison pivot sera encore supposée parfaite), la rotation étant repérée par l'angle θ entre OX et AB, OX étant un axe fixe dans $(\mathscr{R}_T)$.



1) a) On applique le TMC au système { barre + gomme } dans le rérérentiel terrestre ($\mathscr{R}_T$) galiléen. Le système étant immobile, la somme des moments des forces **extérieures** par rapport à Oy (axe de rotation) est nulle. On travaille dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ (base de projection). Ces moments sont :

- $-C\theta\,\vec{e_y}$
- Le moment du poids de A :

$$\overrightarrow{OA} \wedge m\,\vec{g} = L\,\vec{e_x} \wedge mg\,(-\cos\theta\,\vec{e_z} + \sin\theta\,\vec{e_x}) = mgL\,\cos\theta\,\vec{e_y}$$

- Les moment du poids de la barre et de la liaison pivot sont nuls.

Projetons sur $\vec{e_y}$:

$$-C\theta_{eq} + mgL\,\cos\theta_{eq} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\cos\theta_{eq} = \frac{C}{mgL}\,\theta_{eq}}$$

b) Le système précédent étant en équilibre dans le référentiel terrestre, la gomme est elle aussi immobile : la somme des forces qui lui sont appliquées est nulle. Or la gomme est soumise à :

- La réaction normale de la barre : $\vec{N} = N\,\vec{e_z}$
- La réaction tangentielle de la barre $\vec{T} = T_x\,\vec{e_x} + T_y\,\vec{e_y}$
- Le poids : $m\,\vec{g} = mg\,(-\cos\theta_{eq}\,\vec{e_z} + \sin\theta_{eq}\,\vec{e_x})$

De $\vec{N} + \vec{T} + m\,\vec{g} = \vec{0}$ on tire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} T_x &=& -\,mg\sin\theta_{eq} \\ T_y &=& 0 \\ N &=& mg\cos\theta_{eq} \end{array}\right.$$

c) La gomme ne glisse pas si :

$$\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} < f_s \iff \boxed{\tan\,\theta_{eq} < f_s \quad \text{donc} \quad \theta_{eq} < \arctan f_s}$$

Avec les valeurs numériques de l'énoncé on trouve : $\theta_{eq} < 11{,}3°$

On résout ensuite à l'aide de la calculatrice l'équation :

$$\cos\theta_{eq} = \frac{0{,}2}{(10.10^{-3}) \times 9{,}81 \times 0{,}5}\,\theta_{eq} = 4{,}08\ \theta_{eq}$$

et on trouve : $\theta_{eq} = 0{,}238$ rad $= 13°$

Le ressort spiral étudié n'est donc pas suffisant pour maintenir m sur la barre.

2) Résolution de problème :

On commence par appliquer le PFD à la gomme en supposant que celle-ci ne glisse pas. Pour changer, faisons-le dans le référentiel terrestre ($\mathscr{R}_T$) galiléen mais en travaillant dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$:

$$\overrightarrow{OA} = L\,\overrightarrow{e_x}\ ;\ \overrightarrow{v}_{A/\mathscr{R}_T} = L\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_x}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_T} = -\,L\dot\theta\,\overrightarrow{e_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a}_{A/\mathscr{R}_T} = -\,L\ddot\theta\,\overrightarrow{e_z} - L\dot\theta^2\,\overrightarrow{e_x}$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} -\,mL\dot\theta^2 &=& T_x + mg\,\sin\theta \\ 0 &=& T_y \\ -\,mL\ddot\theta &=& -\,mg\cos\theta + N \end{cases}$$

Il faut donc déterminer $\dot\theta$ et $\ddot\theta$. Pour cela on peut appliquer le TMC au système { barre + gomme }. Une démarche analogue à celle de la question de la question **1)** a) conduit à l'équation :

$$(J + mL^2)\,\ddot\theta = mgL\,\cos\theta \iff \ddot\theta = \frac{3mg}{(M+3m)\,L}\,\cos\theta = \omega_0^2\cos\theta$$

avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3mg}{(M+3m)\,L}}$$

En multipliant cette équation par $\dot\theta$ et en intégrant on obtient :

$$\dot\theta^2 = 2\omega_0^2\sin\theta + C \quad \text{avec } C \text{ constante}$$

Comme $\theta(0) = 0$ et $\dot\theta(0) = 0$, il vient $C = 0$, d'où $\boxed{\dot\theta^2 = 2\omega_0^2\sin\theta}$.

On réinjecte les résultats dans les expressions de T_x et N pour trouver :

$$T_x = -\,mg\,\frac{M+9m}{M+3m}\,\sin\theta \quad \text{et} \quad N = mg\,\frac{M}{M+3m}\,\cos\theta$$

On remarque que $N > 0$; N ne s'annulle pas et donc la gomme ne peut pas "décoller" de la barre.

L'absence de glissement ne peut persister que si :

$$\frac{\|\overrightarrow{T}\|}{\|\overrightarrow{N}\|} < f_s \iff \frac{|T_x|}{N} < f_s \iff \frac{M+9m}{M}\,\tan\theta < f_s$$

soit :

$$\boxed{\theta < \arctan\left(f_s\,\frac{M}{M+9m}\right) \overset{\text{AN}}{=} 10{,}5°}$$